Envariabelanalys för ingenjörer, naturvetare och lärare

Seidon Alsaody

Oktober 2025

Förord

Målet med denna kurs är detsamma som målet med kanske all utbildning: att få en bättre förståelse av världen. En sådan förståelse ger oss en vidgad blick på universum och vår plats i den, och möjlighet att påverka och förändra genom att utveckla ny vetenskap och teknik. Detta är ett ambitiöst mål, men så är också matematiken ett kraftfullt verktyg som ger oss alla möjligheten att arbeta oss närmare det målet.

Mer precist kan man förstå världen genom att modellera den matematiskt. Sådana matematiska modeller utgörs ofta av så kallade **differentialekvationer**. Newtons andra lag är en sådan ekvation som beskriver klassisk mekanik; Einsteins ekvationer är ett annat exempel, och universum modelleras som en lösning till dem. Liknande ekvationer beskriver hur bakteriekulturer växer, information sprids, ekonomiska tillgångar förändras över tid, och mycket mer. Vad är då en differentialekvation? Det är en ekvation där **funktioner** och deras **derivator** ingår. För att förstå differentialekvationer (och, i förlängningen, världen) måste vi förstå dessa begrepp. För att förstå derivator måste vi först förstå **gränsvärden** och olika gränsprocesser. Sedan ska vi kunna lösa differentialekvationer, och till det behöver vi lära oss **integrera** funktioner. De mest utmanande differentialekvationer kräver istället att vi representerar funktioner som **oändliga serier**, alltså summor med oändliga termer.

Det är därför rimligt att denna kurs går igenom just dessa begrepp: gränsvärden, derivator, serier, integraler och till sist differentialekvationer. Så växer vår förståelse av världen fram. De storheter vi studerar är funktioner i en variabel som tar reella tal som värden, och den apparat som vi upptäcker och bygger upp heter därför envariabelanalys. I de kommande kapitlen utvecklar vi dessa teman steg för steg. Mycket nytta och nöje!

Författarens tack. Idén att skriva ett kompendium är inspirerad av Martin Herschends och Thomas Kraghs utmärkta kompendier i linjär algebra. Formatteringen är direkt kopierad från dessa, och jag är dem tacksam. Isac Hedén, Magnus Jacobsson och Anna Sakovich ska ha tack för det goda samarbetet med arbetsbladen till kursen. Martin, Thomas, Isac, Magnus och Anna ska alla ha tack för ögonöppnande diskussioner som har gjort avtryck i kompendiet. Sist och mest skulle jag vilja tacka alla studenter för deras aktiva deltagande i undervisningen: att ha haft er i åtanke som potentiella läsare under skrivandet har gjort kompendiet gott.

Uppsala sensommaren 2025

Läsanvisningar

Struktur

Kompendiet är uppdelat i kapitel efter temana i förordet. Ett nollte kapitel går igenom grunderna för tal och funktioner. Till det kapitlet hänvisas du vid behov från olika kapitel. Varje kapitel är indelat i olika avsnitt, som är numrerade och listade i innehållsförteckningen.

Definitioner, satser, exempel och idéer

Nya begrepp definieras genom, ja, definitioner. Detta kan låta självklart, men det innebär alltså att begreppet precis är vad definitionen säger att det är, varken mer eller mindre. Du förväntas lära dig, eller gå tillbaka till, definitionen varje gång du behöver veta vad ett begrepp innebär.

Från definitionerna härleder vi olika egenskaper som formuleras som satser. Begreppen och satserna illustreras genom exempel.

Matematik handlar om idéer. Ibland har jag valt att lyfta fram idén bakom en definition, sats, bevis, beräkning eller annat och presentera den med ett informellt språk, eller fördjupa resonemanget, för att knyta till intuition och tidigare kunskaper.

Definitioner, satser, exempel, idéer och anmärkningar ges i särskilt färgkodade rutor. Definitioner och satser är numrerade efter vilket kapitel de ingår i, medan exempel och anmärkningar är numrerade efter vilket avsnitt de ingår i. Sats 1.2 ingår alltså i Kapitel 1 och kommer efter Definition 1.1, medan Exempel 1.2.1 ingår i Kapitel 1, Avsnitt 2, och kommer före Anmärkning 1.2.2.

Bevis

Varje sats har ett bevis och alla påståenden kan bevisas utifrån axiom och definitioner. Det är så vi garanterar att vårt arbete vilar på en solid logisk struktur som var och en kan använda och granska kritiskt. I detta kompendium har jag valt att bara inkludera de bevis som är särskilt viktiga, t ex genom att de ger den bästa förklaringen till varför en sats gäller, eller innehåller ett intressant och användbart resonemang. Du förväntas därför läsa bevisen och tänka igenom hur argumenten är uppbyggda.

Illustrationer

Alla grafer är ritade i det grafritande programmet Desmos, som finns fritt tillgängligt på desmos.com/calculator. Det är en god idé att själv experimentera med Desmos eller liknande program för att rita olika grafer. Så småningom lär du dig att förstå hur funktioner beter sig och kan skissa dem för hand utan grafritande program. Detta är en värdefull färdighet som stärker din intuition.

Övningar

Matematik lär man sig genom att reflektera och arbeta aktivt, närmare bestämt genom att göra övningar och lösa problem. Detta kompendium innehåller inga egna övningsuppgifter, men passar väl tillsammans med arbetsbladen till kursen (författade tillsammans med Isac Hedén). I innehållsförteckningen kopplas varje avsnitt till motsvarande arbetsblad.

Fel

Jag har korrekturläst kompendiet en gång efter avslutat skrivande, och därefter använt verktyg för att upptäcka matematiska och språkliga fel, samt tagit in synpunkter från kollegor. Trots detta kan fel kvarstå, och jag blir tacksam för all återkoppling som kan göra kompendiet bättre.

Läs vidare!

Detta kompendium försöker inte säga allt som kan sägas om envariabelanalys: analysämnet är för brett och djupt för att detta skulle vara möjligt. Till exempel har många bevis utelämnats, och mitt fokus har varit att kompendiet ska gå smidigt att följa parallellt med en kurs i envariabelanalys. Ämnet har också många tillämpningar, där bara ett urval ingår här.

För den som är intresserad av att läsa vidare finns

- *Analys i en variabel* av Arne Persson och Lars-Christer Böiers,
- *Endimensionell analys* av Jonas Månsson och Patrick Nordbeck,
- *Calculus* av Robert Adams och Christopher Essex,

och många fler. Detta kompendium vilar på den befintliga litteraturen.

Utöver litteraturen är det en lärorik uppgift att källkritiskt söka kompletterande information på egen hand. På Wikipedia finns många välskrivna artiklar som kan vara till nytta.

Innehåll

0 Vår utgångspunkt

I denna kurs behandlar vi funktioner som tar reella värden. Därför behöver vi ha en grundläggande förståelse dels för reella tal, dels för funktioner. Det är syftet med detta kapitel.

0.1 Reella tal

Vad är problemet?

I denna kurs utgår vi från att vi förstår vad de reella talen är. Detta är långt från självklart, och en matematiskt korrekt konstruktion av de reella talen är ett krävande projekt. Hur kan det vara så? Låt oss utgå från de naturliga talen $0, 1, 2, 3, \ldots$. Dessa bildar en mängd som vi kallar för $\mathbb{N}$. Genom att införa subtraktion kan vi utvidga de naturliga talen och få mängden $\mathbb{Z}$ av alla heltal $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$. På liknande sätt kan vi få de rationella talen — mängden $\mathbb{Q}$ av alla tal på formen $\frac{m}{n}$ med heltal i täljare och nämnare — genom att definiera bråkräkning. Steget från $\mathbb{N}$ till $\mathbb{Z}$ och sedan till $\mathbb{Q}$ är i någon mening algebraiskt. Men för att gå från $\mathbb{Q}$ till mängden $\mathbb{R}$ krävs något mer, närmare bestämt att kunna hantera oändliga följder av tal som ”närmar sig” ett värde såsom $\sqrt{2}$ eller π.

Vad är lösningen?

Som tur är kan vi ofta vägledas av den intuition vi ändå har för talen. För att ändå kunna säga något precist, definierar vi reella tal i termer av deras *decimalutveckling*. Läsaren förutsätts vara bekant med (oändliga) decimalutvecklingar, som t ex

$$\tfrac{1}{3} = 0.333\ldots$$

och

$$7 = 7.0000\ldots$$

men även

$$\pi = 3.14159\dots.$$

Notera att vissa tal, som exemplet 7 ovan, kan beskrivas exakt med ändligt många decimaler. För att alla tal ska stå på gemensam grund låter vi dessa tal ha en oändlig decimalutveckling genom att ”fylla ut” decimalutvecklingen med nollor. Ofta utelämnar vi dock nollorna: när vi skriver 7 så tänker vi formellt på $7.00000\dots$.

Från skolan minns du kanske att man skiljer på två fall: decimalutvecklingar som blir periodiska (dvs upprepar sig regelbundet) efter ett tag, och decimalutvecklingar som inte blir det. Dessa svarar mot **rationella** respektive **irrationella** tal.

Exempel 0.1.1

Decimalutvecklingen $0.142857142857\dots$, som svarar mot det rationella talet $\frac{1}{7}$, är periodisk från och med den första decimalen; cykeln 142857 av längd 6 återkommer regelbundet, så man säger att perioden är 6.

Decimalutvecklingen $1.8333\dots$ är periodisk från och med den andra decimalen och perioden är 1. Den svarar mot det rationella talet $\frac{11}{6}$.

Den välkända decimalutvecklingen $3.14159\dots$ är inte periodisk då den inte består av någon regelbundet återkommande cykel. Den svarar mot det irrationella talet π.

En subtil poäng: standardidentifikationen

För att kunna använda decimalutvecklingar som definition av reella tal, måste vi utesluta ett problematiskt fall, nämligen decimalutvecklingar som (från och med en viss decimal) bara består av nior. Låt oss titta närmare på detta. Om vi vill att våra vanliga räkneregler ska gälla, och att räkning med decimalutvecklingar ska fungera som vi förväntar oss att den gör, så vill vi å ena sidan att

$$3 \cdot \tfrac{1}{3} = 1 = 1.000\dots$$

och å andra sidan att

$$3 \cdot 0.33333\dots = 0.99999\dots$$

Eftersom decimalutvecklingen $0.33333\dots$ svarar mot det rationella talet $\frac{1}{3}$, så vill vi alltså att

$$0.99999\dots = 1.00000\dots$$

Vi måste alltså betrakta dessa två olika decimalutvecklingar som ett och samma reella tal. På samma sätt kommer vi till exempel att ha

$$2.4699999\ldots = 2.4700000\ldots$$

och så vidare. Varje gång en decimalutveckling slutar med en oändlig följd av nior betraktar vi den som lika med den decimalutveckling som fås genom att räkna upp den sista decimalen som inte var 9 och sätta alla efterföljande decimaler till 0. Med denna identifikation (identifiera=betrakta som lika) har vi löst problemet. Vi kallar denna identifikation för **standardidentifikationen**.

Nu har vi en mängd, nämligen mängden av alla decimalutvecklingar. Mängden innehåller en nolla: talet $0 = 0.00000\ldots$. Från skolan vet vi hur man adderar, subtraherar, multiplicerar och dividerar decimaltal. Detta tar vi som grund för följande definition.

Definition 0.1

Mängden $\mathbb{R}$ definieras som mängden av alla oändliga decimalutvecklingar (där vi använder standardidentifikationen i händelse av decimalutvecklingar bara består av nior från och med en viss decimal). Elementen i $\mathbb{R}$ kallas för **reella tal**. Om a och b är reella tal så definierar vi de reella talen $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$ och (om $b \neq 0$) a/b genom vanliga räkneoperationer på decimaltal.

Anmärkning 0.1.2

En oändlig decimalutveckling är ett exempel på en oändlig serie. Vi behandlar dessa i Kapitel 3.

En användbar egenskap hos de reella talen är att de kan approximeras så bra man önskar med rationella tal. Detta är något du redan sett med decimalapproximationer. Låt oss ta exemplet $r = \pi$. Vi kan approximera π med $0, 1, 2, 3, \ldots$ decimalers noggrannhet, med följande rationella tal:

$$r_0 = 3 \quad r_1 = 3.1 \quad r_2 = 3.14 \quad r_3 = 3.142 \quad r_4 = 3.1416 \quad \ldots.$$

Hur noggrant vi än vill approximera π, kan vi göra det med ett rationellt tal genom att ta tillräckligt många decimaler. Detta gäller alla reella tal, och intuitivt beror det just på att vi definierat de reella talen som oändliga decimalutvecklingar. Det vi egentligen har skapat är en *talföljd* $r_0, r_1, r_2, \ldots$ som går mot, eller *konvergerar mot* det reella talet r ju fler termer vi tar.

Konvergens av talföljder behandlas i Kapitel 3 och med hjälp av teorin där kan vi formulera denna egenskap som följer.

Sats 0.2

För varje reellt tal r finns det en följd av rationella tal $r_0, r_1, r_2, \ldots$ som konvergerar mot r, dvs vars gränsvärde uppfyller

$$\lim_{k\to\infty} r_k = r.$$

Vi kommer inte bara att behandla gränsvärden av talföljder, utan även av funktioner, vilket vi faktiskt börjar med. Innan vi går in på funktioner inför vi en notation och terminologi för intervall av reella tal, som kommer att vara användbar.

Definition 0.3

Låt $a, b \in \mathbb{R}$. Vi definierar intervallen

$$\begin{aligned}
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},\\
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\},\\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\},\\
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\},\\
(a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\},\\
[a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\},\\
(-\infty,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\},\\
(-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\},\\
(-\infty,\infty) &= \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Hakparentes betyder alltså att ändpunkten ingår, medan rund parentes betyder att den inte gör det. Eftersom ∞ och $-\infty$ inte är reella tal kan de aldrig ingå. Ett **slutet intervall** är ett intervall där alla möjliga ändpunkter ingår, och ett **öppet intervall** är ett intervall där inga ändpunkter ingår. Intervallen (a,b), (a,∞), $(-\infty,b)$ och $(-\infty,\infty)$ är öppna, medan intervallen $[a,b]$, $[a,\infty)$, $(-\infty,b]$ och $(-\infty,\infty)$ är slutna. De övriga intervallen är varken öppna eller slutna. (Notera att $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$ både är öppet och slutet.)

Ett intervall sägs vara **begränsat** om det har ändlig längd. De fyra första intervallen ovan är begränsade, och de fem sista är inte det; de är **obegränsade**.

0.2 Funktioner

Bakgrund

Begreppet funktion är centralt, inte bara i denna kurs, utan i snart sagt all matematisk modellering. Funktioner används för att beskriva samband mellan storheter, där en storhet beror på en annan. Exempelvis kan hastigheten hos en viss partikel förändras som funktion av tiden — lägg märke till att detta sätt att uttrycka sig är vanligt också i vardagsspråket. Ett annat exempel är temperaturen i en gasbehållare, som är en funktion av trycket i behållaren. Ett tredje exempel är den kommunala skattesatsen för år 2025, som beror på vilken kommun man bor i och alltså är en funktion av kommunen.

Att skattesatsen är en funktion av kommunen kan man förstå som att till varje kommun så har en skattesats tilldelats. (I just detta exempel sker denna tilldelning genom ett politiskt beslut.) Med symboler skulle detta innebära att varje kommun x blir tilldelad en skattesats $S(x)$. Här betecknar S själva funktionen "skattesats". Symbolen x representerar kommunerna och genom att ersätta den med ett konkret exempel får vi en konkret skattesats. Det gäller t ex att

$$S(\text{Uppsala}) = 32.85\%.$$

För att beskriva en sådan funktion behöver vi alltså veta tre saker:

a) Vad är x för slags storhet? Med andra ord: vad är mängden av alla x som funktionen S är definierad på? I detta exempel är x någon kommun i Sverige, dvs x är ett element i mängden av alla kommuner i Sverige.

b) Vad är $S(x)$ för slags storhet? Med andra ord: vad är mängden av alla värden som S kan anta? I detta exempel är detta mängden av alla möjliga skattesatser. Här får vi bestämma oss för vad som är en möjlig skattesats, och för att vara på den säkra sidan tillåter vi alla möjliga procentsatser mellan 0% och 100%, dvs reella tal mellan 0 och 1 (även om vissa av dessa värden är osannolika).

c) Hur ser funktionen S ut? Med andra ord, vad är $S(x)$ för varje x i mängden från a)? I detta exempel ges detta av en lista över skattesatserna i alla kommuner.

Grundläggande begrepp

Dessa tre ingredienser är det som ingår i definitionen av en funktion. Om vi kallar mängden av alla kommuner i Sverige för K, och mängden av alla procentsatser för P, så har vi alltså en funktion som till varje $x \in K$ tilldelar en skattesats $S(x) \in P$. Vi skriver detta kortfattat som $S : K \to P$. Allmänt gör vi följande definition.

Definition 0.4

En **funktion** f **från en mängd** D **till en mängd** M är en regel för hur varje element $x \in D$ tilldelas precis ett element $f(x) \in M$. Mängden D kallas för **definitionsmängden till** f och mängden M kallas för **målmängden till** f. För varje $x \in D$ kallas $f(x)$ för **värdet av** f **i** x.

Vi betecknar definitionsmängden till en funktion f ibland för D_f eller $D(f)$. I exemplet med skattesatsfunktionen S tidigare, är alltså definitionsmängden

$$D_S = \{x \mid x \text{ är en kommun i Sverige}\}.$$

För funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som ges av $f(x) = x^2$ är både definitionsmängd och målmängd lika med mängden av alla reella tal. Men det betyder inte att varje reellt tal kan uppstå som *funktionsvärde*: de negativa talen i målmängden kan inte uppstå som värden till f. Mer intressant än målmängden är därför värdemängden.

Definition 0.5

Värdemängden till en funktion $f : D \to M$ definieras som

$$V_f = \{y \in M \mid y = f(x) \text{ för något } \ x \in D\}$$

och består alltså av alla funktionsvärden till f.

Värdemängden betecknas ibland med $V(f)$.

Anmärkning 0.2.1

I denna kurs arbetar vi med funktioner där definitionsmängden och målmängden är delmängder av $\mathbb{R}$ (oftast intervall eller unioner av intervall). Vi använder därför ofta $\mathbb{R}$ som målmängd. Vad gäller definitionsmängden är det ofta praktiskt att låta den vara så stor som möjligt. Vi kallar detta för **definitionsmängdskonventionen**: definitionsmängden D_f är, om inget annat anges, mängden av alla reella tal där funktionsuttrycket är definierat.

Exempel 0.2.2

Funktionsuttrycket $f(x) = \frac{1}{x-3}$ är definierat för alla reella $x \neq 3$. Det definierar därför en funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$. För värdemängden gäller $V_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Varför?)

Observera slutligen att en och samma funktion kan definieras av olika uttryck eller på olika sätt på olika delar av sin definitionsmängd. Det är trots detta **en och samma funktion**. Följande är exempel på detta.

Exempel 0.2.3

Betrakta $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som definieras av

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{om } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{om } x \geq 0 \end{cases}.$$

Exempel 0.2.4

Betrakta $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som definieras av

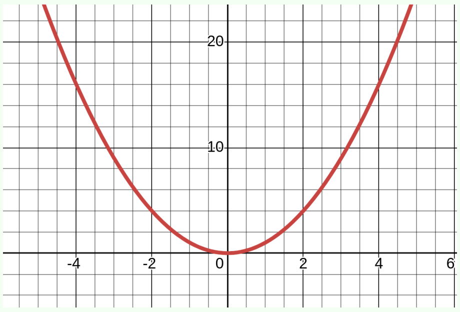
$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x \text{ är ett heltal} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}.$$

Grafen till en funktion

För att åskådliggöra en funktion kan man rita dess graf. Vi tänker nu främst på funktioner $f : D \to M$, där D och M är delmängder av $\mathbb{R}$. *Grafen till f* består då av alla punkter $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ där $x \in D$ och $y = f(x)$.

Exempel 0.2.5

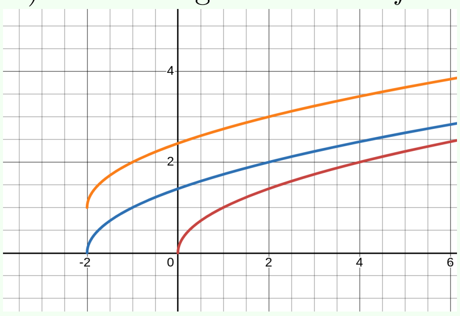
Grafen till funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som ges av $f(x) = x^2$ består alltså av alla punkter (x, y) i planet $\mathbb{R}^2$, där $y = x^2$. (En del av) den ser ut som följer.



Om man har en funktion f så kan man modifiera den på olika sätt. Nästa exempel illustrerar detta med funktionen $f(x) = \sqrt{x}$.

Exempel 0.2.6

Nedan visas grafen till tre funktioner, som ges av $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x+2}$ och $h(x) = \sqrt{x+2}+1$. Para ihop rätt graf med rätt funktion, och fundera på hur definitionsmängden och värdemängden hos g (respektive h) förhåller sig till dem hos f.



Symmetrier

En funktion kan vara symmetrisk på många olika sätt. Vi lyfter fram tre sådana.

Definition 0.6

En funktion $f : D \to \mathbb{R}$ kallas

a) **jämn** om definitionsmängden D är symmetrisk runt 0, och $f(-x) = f(x)$ för alla $x \in D$, och

b) **udda** om definitionsmängden D är symmetrisk runt 0, och

$f(-x) = -f(x)$ för alla $x \in D$.

c) **periodisk med period** P, där $P \in \mathbb{R}$, om $f(x) = f(x+P)$ för alla $x \in D$.

Att definitionsmängden är symmetrisk runt 0 betyder att

$$x \in D \Longleftrightarrow -x \in D$$

dvs att f är definierad i en punkt x om och endast om den är definierad i punkten $-x$ på andra sidan om origo. Definitionen av en periodisk funktion inkluderar att $f(x+P)$ är definierat så länge $f(x)$ är definierat, dvs att $x + P \in D$ gäller för alla $x \in D$.

Exempel 0.2.7

Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som ges av $f(x) = x^2$ är jämn, eftersom

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x),$$

och detsamma gäller $f(x) = x^n$ om n är ett jämnt heltal.

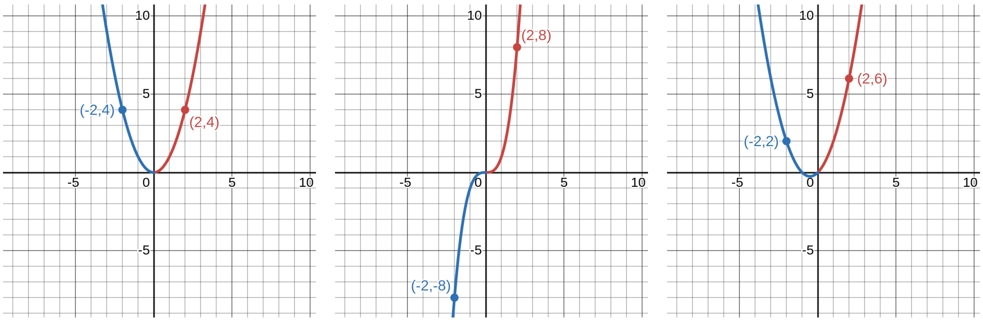
Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som ges av $f(x) = x^3$ är udda, eftersom

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x),$$

och detsamma gäller $f(x) = x^n$ om n är ett udda heltal.

Vi kommer att se att $\cos(-x) = \cos x$ och $\sin(-x) = \sin x$ för alla $x \in \mathbb{R}$, så cos-funktionen är jämn medan sin-funktionen är udda. Vi kommer också att se att både sin och cos är periodiska med period 2π.

Nedan syns, från vänster till höger, graferna till den jämna funktionen $f(x) = x^2$, den udda funktionen $g(x) = x^3$, och funktionen $f(x) = x^2 + x$ som varken är jämn eller udda. Som illustration har funktionsvärdena i punkterna 2 och -2 markerats.



Anmärkning 0.2.8: Grafisk betydelse

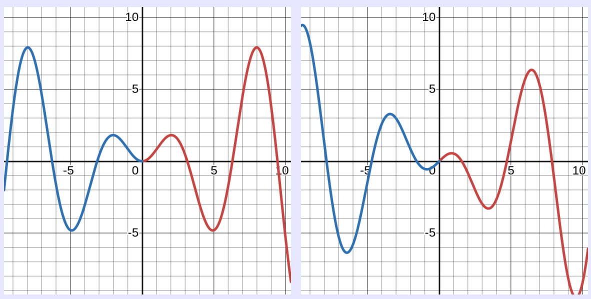
Från definitionen följer att grafen till en jämn funktion är spegelsymmetrisk i y-axeln: grafens utseende till vänster om 0 är en spegelbild av utseendet till höger om 0.

På samma sätt är grafen till en udda funktion "omvänt spegelsymmetrisk" i y-axeln, i bemärkelsen att grafens utseende till vänster om 0 är en upp-och-nedvänd spegelbild av utseendet till höger om 0.

Anmärkning 0.2.9

a) Att vara jämn eller udda innebär att funktionens utseende till vänster om 0 är helt bestämt av hur funktionen ser ut till höger om 0. Detta är ett mycket starkt krav. De allra flesta funktioner är varken jämna eller udda.

b) Produkten av två jämna funktioner, eller av två udda funktioner, är jämn. Produkten av en jämn och en udda funktion är udda. Så är t ex $x \sin x$ (till vänster nedan) jämn medan $x \cos x$ (till höger) är udda.



Att kombinera funktioner

Två funktioner f och g kan kombineras på olika sätt. Vi håller oss här till funktioner vars definitionsmängder är delmängder av $\mathbb{R}$.

Definition 0.7

Om $f : D_f \to \mathbb{R}$ och $g : D_g \to \mathbb{R}$ där $D_f \subseteq \mathbb{R}$ och $D_g \subseteq \mathbb{R}$, så definieras funktionerna $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ och f/g på det naturliga sättet, dvs

$$\begin{aligned}
&(f+g)(x) = f(x) + g(x),\\
&(f-g)(x) = f(x) - g(x),\\
&(f \cdot g)(x) = f(x)g(x), \text{ och}\\
&(f/g)(x) = f(x)/g(x).
\end{aligned}$$

Definitionsmängden för de tre första funktionerna är $D_f \cap D_g$, och för f/g består definitionsmängden av alla $x \in D_f \cap D_g$ där $g(x) \neq 0$.

Definitionsmängden består alltså av alla $x \in \mathbb{R}$ där både f och g är definierade, med tillägget att $g(x) \neq 0$ när vi dividerar med $g(x)$.

Ett annat sätt att kombinera två funktioner f och g är genom sammansättning, där man tillämpar f först, och sedan g på resultatet av f. Detta kräver att definitionsmängden till g innehåller alla värden av f. Detaljerna är som följer.

Definition 0.8

Om $f : D_f \to M$ och $g : D_g \to N$ är två funktioner med $N \subseteq D_f$, så definieras **sammansättningen** $f \circ g : D \to N$ som

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

för alla $x \in E$.

Exempel 0.2.10

Låt $f : \mathbb{R} \to [1, \infty)$ ges av $f(x) = 2 + \sqrt{x}$ och $g : [0, \infty) \to [2, \infty)$ ges av $g(x) = x^2 + 1$. Då ges $f \circ g : \mathbb{R} \to [2, \infty)$ av

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = 2 + \sqrt{x^2 + 1}$$

Observera att $f \circ g$ och $g \circ f$ betecknar olika saker, och även när båda är definierade så är de i allmänhet olika, som nästa exempel visar.

Exempel 0.2.11

Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ges av $f(x) = x^2$ och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ges av $g(x) = x + 1$. Då är

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = x^2 + 1$$

medan

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1.$$

Egenskaper

Definitionen av en funktion, och diskussionen runt den, lyfter fram två problematiska fenomen som kan uppstå.

Anmärkning 0.2.12

a) Enligt definitionen av en funktion ska varje x i definitionsmängden tilldelas ett funktionsvärde y i målmängden. Om $f : D \to M$ så betyder detta alltså att $f(x)$ är definierat för varje $x \in D$, det vill säga att varje $x \in D$ avbildas på ett $y = f(x) \in M$. Men det säger inte att varje $y \in M$ måste "träffas", dvs måste vara ett funktionsvärde. Med andra ord behöver värdemängden inte vara hela målmängden, utan kan vara en mindre del av den.

b) I definitionen av en funktion ingår det att varje $x \in D$ tilldelas *exakt* ett $y \in M$. Det betyder att $f(x) \in M$ är ett enda, entydigt bestämt element. Men det hindrar inte att olika $x \in D$ avbildas på samma $y \in M$, det vill säga att ett och samma $y \in M$ kan uppfylla $y = f(x_1)$ och $y = f(x_2)$ för olika element x_1 och x_2 i D.

Vi vill kunna beskriva funktioner som inte uppvisar sådana problem, vilket är poängen med nästa definition.

Definition 0.9

En funktion $f : D \to M$ kallas

a) **surjektiv** om varje $y \in M$ uppfyller $y = f(x)$ för något $x \in D$,

b) **injektiv** om $f(x_1) \neq f(x_2)$ så länge $x_1 \neq x_2$, och

c) **bijektiv** om den både är surjektiv och injektiv.

Exempel 0.2.13

Skattesatsfunktionen är inte surjektiv. Kom ihåg att vi har definierat den som en funktion från mängden av alla kommuner i Sverige, till mängden av alla procentsatser mellan 0% och 100%. Ingen kommun x uppfyller till exempel att $S(x) = 0\%$.

Skattesatsfunktionen är inte heller injektiv, eftersom det finns flera kommuner som har en och samma skattesats. Exempelvis har både Uppsala och Eskilstuna skattesatsen 32.85%, vilket innebär att

$$S(\text{Uppsala}) = S(\text{Eskilstuna})$$

trots att Uppsala och Eskilstuna givetvis är två olika kommuner.

Att f är surjektiv betyder alltså att värdemängden är lika med målmängden. Att f är injektiv betyder alltså att $f(x_1) = f(x_2)$ bara kan hända om redan $x_1 = x_2$, det vill säga att likheten $f(x_1) = f(x_2)$ medför $x_1 = x_2$.

Anmärkning 0.2.14

Övertyga dig om att definition 0.9 kan formuleras på följande sätt: en funktion $f : D \to M$ är

a) surjektiv om ekvationen $f(x) = y$ har minst en lösning x för varje $y \in M$,

b) injektiv om ekvationen $f(x) = y$ har högst en lösning x för varje $y \in M$, och

c) bijektiv om ekvationen $f(x) = y$ har exakt en lösning x för varje $y \in M$.

Inversen till en funktion

En fördel som injektiva, och i större utsträckning bijektiva, funktioner har, är att man kan invertera dem. Idén är att om $y = f(x)$, så kan man lösa ut x från detta samband som funktion av y. Om detta är möjligt kallar man denna funktion för *inversen till f* och betecknar den med f^{-1}.

Exempel 0.2.15

Om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ges av $f(x) = x^3$, så gäller att $y = f(x)$ om och endast om $x = \sqrt[3]{y}$. I detta fall skulle den inversa funktionen till f vara kubikroten $\sqrt[3]{\ }$.

Observera att detta inte fungerar med alla funktioner. Funktionen $f(x) = x^2$ är problematisk eftersom

$$y = x^2 \iff x = \pm\sqrt{y}$$

vilket inte definierar en funktion. Detta beror just på att f inte är injektiv. Exempelvis är både $f(2) = 4$ och $f(-2) = 4$, och därför är det inte entydigt bestämt vilken av 2 och -2 som ska vara den inversa funktionens värde.

Definition 0.10

En funktion $f : D \to M$ med värdemängd V_f kallas **inverterbar** om det finns en funktion $f^{-1} : V_f \to D$ som uppfyller

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

En sådan funktion kallas för en **invers** till f.

Man kan visa att inversen i så fall är unik, dvs att om f är inverterbar så finns det bara en sådan f^{-1}.

Sats 0.11

Om f är injektiv, så är f inverterbar.

Bevis: Om f är injektiv så finns det, till varje $y \in V_f$, precis ett $x \in D$ som uppfyller $f(x) = y$. Om vi kallar detta x för $f^{-1}(y)$ så har vi definierat en funktion $f^{-1} : V_f \to D$ som precis har egenskapen att

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Därmed har vi konstruerat inversen och visat att f är inverterbar.

Anmärkning 0.2.16

Vår definition av inverterbarhet är ovanlig! I andra sammanhang, t ex linjär algebra, nöjer man sig inte med att f^{-1} har V_f som definitionsmängd: om $f : D \to M$ så vill man att $f^{-1} : M \to D$, dvs är definierad på hela målmängden till f, och inte bara på dess värdemängd. Detta kräver att f inte bara är injektiv, utan även surjektiv, dvs bijektiv, så att värdemängden är hela målmängden. I denna kurs är detta krav för starkt, så vi nöjer oss med vår ovanliga definition.

(En kryptisk, filosofisk anmärkning är att detta är ett exempel på *analysens lokala natur*: vi är oftare intresserade av en funktions beteende i ett litet intervall runt en punkt, och värden i motsvarande intervall, snarare än globalt på hela definitions- eller målmängden. Surjektivitet blir därför mindre viktigt: vi kräver inte att funktionen antar alla värden.)

Inversen har vissa bra egenskaper.

Sats 0.12

Antag att f är en inverterbar funktion.

a) Definitionsmängden till f^{-1} är f:s värdemängd V_f, och värdemängden till f^{-1} är f:s definitionsmängd D_f.

b) För varje $x \in D_f$ gäller $f^{-1}(f(x)) = x$.

c) För varje $y \in V_f$ gäller $f(f^{-1}(y)) = y$.

Påståendena följer från definitionen; vi utelämnar beviset och illustrerar dem med vårt exempel ovan.

Exempel 0.2.17

Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som ges av $f(x) = x^3$ är inverterbar, och $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ges av $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y} = y^{1/3}$. För varje $x \in \mathbb{R}$ gäller

$$f^{-1}(f(x)) = (x^3)^{1/3} = x,$$

och för varje $y \in \mathbb{R}$ gäller

$$f(f^{-1}(y)) = \left(y^{1/3}\right)^3 = y.$$

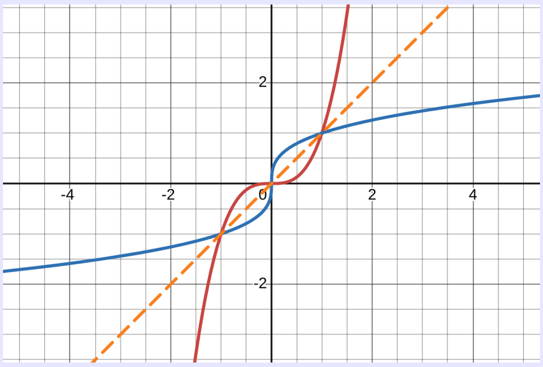
Anmärkning 0.2.18: Notation

När vi beräknade inversen till $f(x) = x^3$ fick vi en funktion av y: $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$. Man brukar byta namn på variabeln för att få f och f^{-1} på samma fot. Man skriver alltså $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Att ha samma variabel gör t ex att man kan jämföra funktionernas grafer.

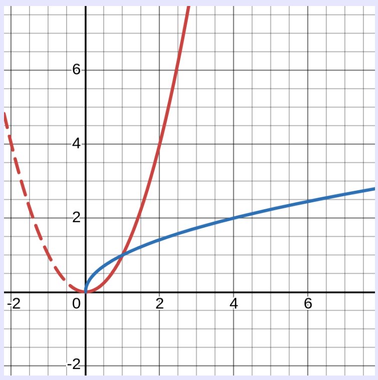
Anmärkning 0.2.19: Grafen till inversen

I de två kurvorna $y = f(x)$ och $y = f^{-1}(x)$ kan man säga att x och y har omvända roller, eftersom $y = f^{-1}(x)$ är ekvivalent med $x = f(y)$. Man kan visa att detta leder till följande grafiska samband: grafen $y = f^{-1}(x)$ fås från grafen $y = f(x)$ genom spegling i linjen $y = x$. Vi ser detta här med $f(x) = x^3$.



Anmärkning 0.2.20

Om en funktion inte är injektiv på hela sin definitionsmängd, så kan man begränsa definitionsmängden till en del där funktionen är injektiv. Exempelvis är $g(x) = x^2$ injektiv om vi t ex begränsar oss dit $x \geq 0$, dvs till intervallet $[0, \infty)$. Där är funktionen inverterbar med invers $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$.



1 Gränsvärden och kontinuitet

Rita grafen till funktionen $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ som ges av $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. Hur beter sig funktionen i närheten av $x = 1$? Funktionen är inte definierad i just $x = 1$, men vi vill ändå kunna säga att den närmar sig 2 då x närmar sig 1, i bemärkelsen att $f(x)$ kommer ”hur nära 2 som helst” ju närmare x kommer till 1.

Detta vill vi kunna uttrycka på ett precist, matematiskt sätt, och det kommer vi att kunna göra med begreppet *gränsvärde*. Detta begrepp ligger sedan till grund för definitionen av kontinuitet, derivata och integral, och är på så sätt extremt användbart. Historiskt kan man argumentera att det är tack vare att vi förstod detta begrepp som analysen kunde nå sådana framgångar som ett matematiskt solitt verktyg.

Idé

Målet med gränsvärden är alltså att kunna tala om en funktionsbeteende i närheten av ett tal $x = a$, utan att ta hänsyn till hur funktionen beter sig i själva punkten.

1.1 Definition och beräkning

Vi definierar begreppet gränsvärde som följer.

Definition 1.1

Antag att funktionen f är definierad nära $x = a$ (dvs i ett intervall runt a) men inte nödvändigtvis i a. Om $f(x)$ kan fås godtyckligt nära värdet L genom att ta x tillräckligt nära a (men inte lika med a), så säger vi att

$$f(x) \text{ går mot } L \text{ då } x \text{ går mot } a$$

eller med andra ord att

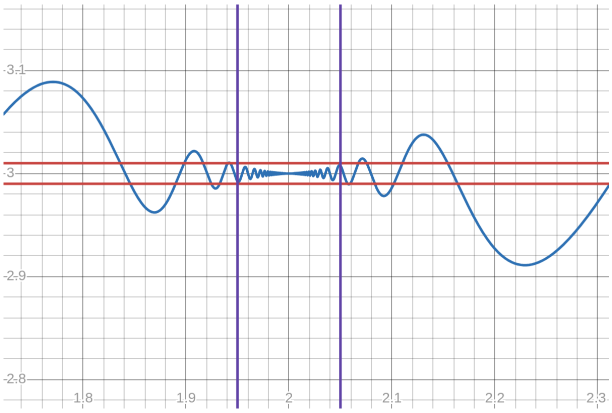
$$\text{gränsvärdet av } f(x) \text{ är } L \text{ då } x \text{ går mot } a.$$

Med symboler skrivs detta som

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ eller } f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L.$$

Bilden nedan illustrerar hur det kan se ut. I figuren syns grafen till en funktion $f(x)$ som uppfyller

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 3.$$



Att $f(x)$ fås godtyckligt nära 3 genom att ta x tillräckligt nära 2 betyder alltså att hur liten felmarginal runt 3 man än kräver att $f(x)$ ska hålla sig inom, så kan detta garanteras genom att bara låta x vara inom ett visst avstånd från 2. Med andra ord: hur tätt de vågräta linjerna än placeras runt $y = 3$ så kan vi placera de lodräta linjerna runt $x = 2$ så, att så länge x är inom de lodräta linjerna så är $f(x)$ inom de vågräta linjerna.

Anmärkning 1.1.1: Gränsvärdets formella definition

Ett mer precist sätt att säga detta är att oavsett vilken felmarginal $\varepsilon > 0$ vi får, kan vi garantera att $f(x)$ ligger innanför felmarginalen (dvs innanför de vågräta linjerna $y = 3 \pm \varepsilon$) så länge x befinner sig inom ett visst avstånd $\delta > 0$ från 2 (dvs inom de lodräta linjerna $x = 2 \pm \delta$). Här är ε (epsilon) givet men vi får anpassa δ (delta) efter ε. Detta är kärnan i den formella definitionen av $\lim_{x\to a} f(x) = L$:

För varje $\varepsilon > 0$ finns det $\delta > 0$ så att $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ så länge $a - \delta < x < a + \delta$ och $x \neq a$.

Den formella definitionen, som vi inte kommer att studera närmare, har fördelen att den inte använder begreppen *godtyckligt nära* och *tillräckligt nära*, men om de begreppen förstås på ett precist sätt betyder dessa två definitioner samma sak.

Exempel 1.1.2

I det inledande exemplet antyddes att

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$

Detta kommer att kunna motiveras med att

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = x+1$$

när $x \neq 1$, och det är "tydligt" att $x+1$ går mot 2 då $x \to 1$. Vi återkommer strax till varför det är tydligt. Det räcker alltså att $\frac{x^2-1}{x-1} = x+1$ när $x \neq 1$ för att dra slutsatsen att de har samma gränsvärde då $x \to 1$. Detta är ett typiskt exempel på hur värdet i punkten 1 inte spelar någon roll för gränsvärdet då $x \to 1$.

Den sista meningen i exemplet kan generaliseras till följande sats, som är en konsekvens av själva definitionen.

Sats 1.2

Om $f(x) = g(x)$ gäller för alla x i ett intervall runt $x = a$, utom möjligen i $x = a$, så är

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

Vi utnyttjar detta i nästa exempel.

Exempel 1.1.3

Vi har

$$\lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{2}{2x}-\frac{x}{2x}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{2-x}{2x}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{2-x}{x-2}\frac{1}{2x}$$

och eftersom det första bråket är lika med -1 då $x \neq 2$ så är detta lika med

$$\lim_{x\to 2} \frac{-1}{2x}$$

och det är "tydligt" att detta är $-\frac{1}{4}$.

Anmärkning 1.1.4: Vad händer då $x = a$?

I definitionen av $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ finns det en formulering om att x inte är lika med a. Observera att det innebär att vi *bortser* från vad som händer då $x = a$. Vi utesluter inte att funktionen är definierad då $x = a$, men vi kräver inte att den är det, och om den är det ställer vi inte krav på vad $f(a)$ ska vara. Sådana krav kommer i definitionen av kontinuitet längre ner.

Gränsvärden behöver inte alltid existera.

Exempel 1.1.5

Gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$$

existerar inte (dvs är inte definierat), eftersom det inte finns något reellt tal L som $\frac{1}{x^2}$ närmar sig, hur nära 0 vi än tar x; detta beror på att $\frac{1}{x^2}$ växer bortom alla gränser då $x \to 0$.

I de tidigare exemplen har vi påstått att vissa gränsvärden är tydliga. Dessa är konsekvenser av följande två satser.

Sats 1.3: Grundläggande gränsvärden

För varje $a \in \mathbb{R}$ gäller

$$\lim_{x\to a} C = C \text{ och } \lim_{x\to a} x = a,$$

där $C \in \mathbb{R}$ är en konstant.

Bevis:

Att $\lim_{x\to a} C = C$ innebär att C kan fås godtyckligt nära C genom att välja x tillräckligt nära a. Detta gäller eftersom $C - C = 0$, så avståndet mellan C och C är noll oavsett x. (Med den formella definitionen säger gränsvärdet att för varje $\varepsilon > 0$ som vi får givet kan vi hitta $\delta > 0$ så att $C-\varepsilon < C < C+\varepsilon$ så länge $a-\delta < x < a+\delta$. Detta är sant eftersom $C - \varepsilon < C < C + \varepsilon$ alltid gäller.)

Det andra gränsvärdet säger att x kan fås godtyckligt nära a genom att välja x tillräckligt nära a, vilket gäller per definition. (Med den formella definitionen: för varje givet $\varepsilon > 0$ kan vi välja $\delta > 0$ så att $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ så länge $a - \delta < x < a + \delta$; välj bara $\delta = \varepsilon$.)

Sats 1.4: Räkneregler för gränsvärden

Om

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ och } \lim_{x\to a} g(x) = M,$$

så gäller följande:

a) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = L + M$,

b) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x) = L - M$,

c) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = LM$,

d) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)/g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x)/\lim\limits_{x\to a} g(x) = L/M$, om $M \neq 0$,

e) $\lim\limits_{x\to a} kf(x) = k\lim\limits_{x\to a} f(x) = kL$, om $k \in \mathbb{R}$ är en konstant,

f) $\lim\limits_{x\to a} f(x)^n = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^n = L^n$, om $n \in \mathbb{Z}$, och

g) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, om $\sqrt[n]{L}$ är definierat.

Bevis: För att bevisa denna sats behöver man gränsvärdets formella definition. Vi bevisar del a) på detta sätt. Resonemanget är teoretiskt och ingår inte i kursen; vi presenterar det för att tydliggöra att påståendena kan härledas logiskt från definitionen.

För att visa a), dvs att

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = L + M,$$

måste vi alltså visa att för varje $\varepsilon > 0$ så kan vi hitta $\delta > 0$ så att

$$L + M - \varepsilon < f(x) + g(x) < L + M + \varepsilon$$

så länge $a - \delta < x < a + \delta$. Vi ska alltså kunna hitta ett sådant δ för varje givet ε. Låt därför ε vara givet.

Vi utgår från att

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \text{ och } \lim_{x \to a} g(x) = M,$$

så vi vet per definition att

1. för varje $\varepsilon_1 > 0$ så kan vi hitta $\delta_1 > 0$ så att

   $$L - \varepsilon_1 < f(x) < L + \varepsilon_1$$

   så länge $a - \delta_1 < x < a + \delta_1$, och

2. för varje $\varepsilon_2 > 0$ så kan vi hitta $\delta_2 > 0$ så att

   $$M - \varepsilon_2 < g(x) < M + \varepsilon_2$$

   så länge $a - \delta_2 < x < a + \delta_2$.

Eftersom vi kan göra detta för varje $\varepsilon_1 > 0$ och för varje $\varepsilon_2 > 0$, kan vi speciellt göra det för $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ och $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ (där ε var det som var givet). Punkt 1.-2. innebär alltså att vi kan hitta δ_1 och δ_2 sådana att

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < L + \frac{\varepsilon}{2}$$

så länge $a - \delta_1 < x < a + \delta_1$, och

$$M - \frac{\varepsilon}{2} < g(x) < M + \frac{\varepsilon}{2}$$

så länge $a - \delta_2 < x < a + \delta_2$. Adderar vi dessa två rader får vi

$$L - \frac{\varepsilon}{2} + M - \frac{\varepsilon}{2} + < f(x) + g(x) < L + \frac{\varepsilon}{2} + M + \frac{\varepsilon}{2}$$

så länge $a - \delta_1 < x < a + \delta_1$ och $a - \delta_2 < x < a + \delta_2$. Om vi väljer δ som det mindre av δ_1 och δ_2, så gäller denna olikhet så länge $a - \delta < x < a + \delta$. Men detta säger precis att

$$L + M - \varepsilon < f(x) + g(x) < L + M + \varepsilon$$

så länge $a - \delta < x < a + \delta$, vilket är definitionen av gränsvärdet vi vill visa.

Med hjälp av dessa satser kan vi beräkna gränsvärden för ett stort antal funktioner.

Exempel 1.1.6

Vi har

$$\lim_{t\to 2}\frac{t^3+\sqrt{t}}{(t-1)(t+5)}=\frac{2^3+\sqrt{2}}{(2-1)(2+5)}=\frac{8+\sqrt{2}}{7}.$$

Exempel 1.1.7

Beräkna

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sqrt{1-t}-\sqrt{1+t}}.$$

Lösning. Här kan vi inte använda räknereglerna eftersom nämnaren går mot noll. Även täljaren går mot noll, och det är oklart vad gränsvärdet blir. Ett användbart trick är att förlänga med *konjugatet* till nämnaren, dvs nämnaren med omvänt tecken mellan termerna, så att konjugatregeln $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ kan användas för att förhoppningsvis förenkla bråket:

$$\begin{aligned}
\frac{t}{\sqrt{1-t}-\sqrt{1+t}} &= \frac{t(\sqrt{1-t}+\sqrt{1+t})}{(\sqrt{1-t}-\sqrt{1+t})(\sqrt{1-t}+\sqrt{1+t})}\\
&= \frac{t(\sqrt{1-t}+\sqrt{1+t})}{\sqrt{1-t}^2-\sqrt{1+t}^2}\\
&= \frac{t(\sqrt{1-t}+\sqrt{1+t})}{(1-t)-(1+t)}\\
&= \frac{t(\sqrt{1-t}+\sqrt{1+t})}{-2t}\\
&= \frac{(\sqrt{1-t}+\sqrt{1+t})}{-2}.
\end{aligned}$$

Dessa likheter gäller då $t\neq 0$ och påverkar därför inte gränsvärdet. I det sista uttrycket kan vi sätta in $t=0$ utan problem och få resultatet $\frac{2}{-2}$, så gränsvärdet är -1.

Vi avslutar med två användbara samband som gäller gränsvärden.

Det första är att om f och g är två funktioner som är uppfyller $f(x)\leq$

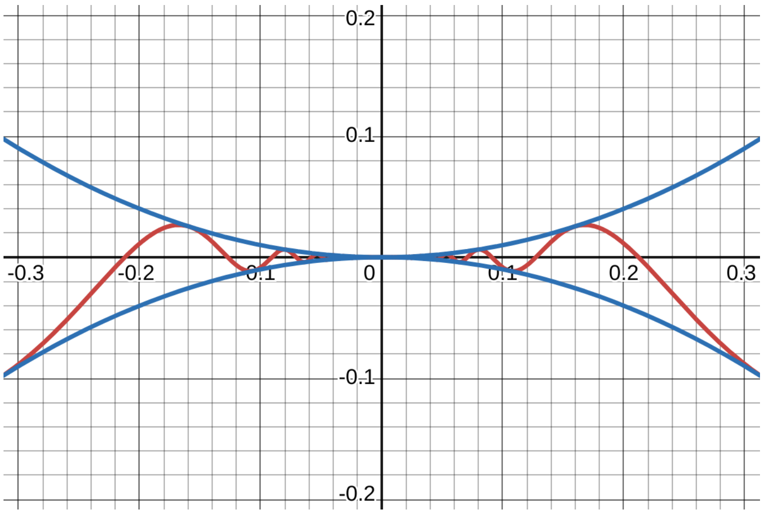
$g(x)$ i ett intervall runt a, men inte nödvändigtvis i a, och vi har $\lim_{x\to a} f(x) = L$ och $\lim_{x\to a} g(x) = M$, så kan man visa att $L \leq M$.

Ett mer invecklat samband som är mycket användbart är följande.

Sats 1.5: Klämsatsen

Antag att funktionerna f, g och h är definierade och uppfyller $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ i ett intervall runt a, men inte nödvändigtvis i a. Om $\lim_{x\to a} f(x) = L$ och $\lim_{x\to a} h(x) = L$, så gäller även $\lim_{x\to a} g(x) = L$.

Med andra ord säger satsen att om $g(x)$ är inklämd mellan två funktioner $f(x)$ och $h(x)$, som båda går mot samma L då $x \to a$, så går $g(x)$ tvunget mot samma L. Detta illustreras av följande bild.



Exempel 1.1.8

Beräkna $\lim_{x\to 0} x^2 \cos(\frac{1}{x})$.

Lösning. Eftersom cosinusfunktionen är begränsad mellan -1 och 1, så gäller

$$-1 \leq \cos(\tfrac{1}{x}) \leq 1$$

för alla $x \neq 0$. Multiplicerar vi överallt med den positiva faktorn x^2 så får vi

$$-x^2 \leq x^2 \cos(\tfrac{1}{x}) \leq x^2.$$

Eftersom både $-x^2$ och x^2 går mot 0 då $x \to 0$, säger klämsatsen att även den inklämda funktionen gör det. Slutsatsen är alltså att $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cos(\frac{1}{x}) = 0$. Det är precis de funktionerna som visas i grafen ovan.

Ensidiga gränsvärden

Ibland är man bara intresserad av vad $f(x)$ går mot då $x \to a$ från ena sidan. Därför definierar man högergränsvärden och vänstergränsvärden.

Definition 1.6

Om $f(x)$ kan fås godtyckligt nära värdet L genom att ta x tillräckligt nära och till höger om a, så säger vi att

$$f(x) \text{ går mot } L \text{ då } x \text{ går mot } a \text{ från höger.}$$

Med symboler skrivs detta som

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L \text{ eller } f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} L.$$

Om $f(x)$ kan fås godtyckligt nära värdet L genom att ta x tillräckligt nära och till vänster om a, så säger vi att

$$f(x) \text{ går mot } L \text{ då } x \text{ går mot } a \text{ från vänster.}$$

Med symboler skrivs detta som

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L \text{ eller } f(x) \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} L.$$

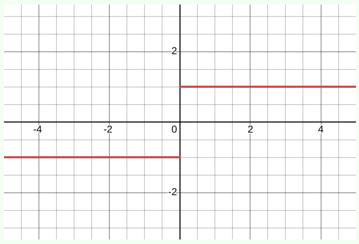
Vi kallar $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ för ett **högergränsvärde** och $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ för ett **vänstergränsvärde**. Notationen $+$ och $-$ handlar alltså om att vi går mot a från höger (plus-sidan) respektive vänster (minus-sidan), och har inget att göra med ifall a är positivt eller negativt.

Exempel 1.1.9

Vi har $\lim\limits_{t\to 2^+} t^3 = \lim\limits_{t\to 2^-} t^3 = 8$ medan $\lim\limits_{t\to -2^+} t^3 = \lim\limits_{t\to -2^-} t^3 = -8$.

Exempel 1.1.10

Teckenfunktionen $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definieras som $\operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}$. Med andra ord är $\operatorname{sgn}(x) = 1$ om $x > 0$ och $\operatorname{sgn}(x) = -1$ om $x < 0$. (Funktionen anger alltså tecknet hos x; namnet kommer från engelskans *sign*, dvs tecken.) Här gäller alltså



$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1 \quad \text{och} \quad \lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1.$$

Det vanliga gränsvärdet $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ kallas i detta sammanhang för ett *tvåsidigt gränsvärde*, av naturliga skäl. För att det ska existera måste de ensidiga gränsvärdena dels existera var för sig, men också vara lika med varandra. Med andra ord gäller följande.

Sats 1.7

Det gäller att $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ om och endast om både $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ och $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$.

Teckenfunktionen saknar alltså (tvåsidigt) gränsvärde då $x \to 0$.

Klämsatsen gäller även för ensidiga gränsvärden. Vi lämnar det till läsaren att formulera detta precist.

1.2 Oändligheten kommer in

Vi har hittills tittat på vad det innebär att $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, där både a och L är (ändliga) tal. Vi ska nu titta på vad som händer när oändligheten kommer in.

Oändliga gränsvärden

Att gränsvärdet $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existerar innebär att det är lika med ett reellt tal L. Gränsvärden kan misslyckas att existera på olika sätt. Till exempel kan höger- och vänstergränsvärdena vara olika, som i Exempel 1.1.10. Ett annat sätt är att funktionen växer större än alla ändliga tal, som i Exempel 1.1.5. Detta senare beteende är vanligt och vi vill ge det en särskild beteckning.

Definition 1.8

Antag att funktionen f är definierad nära $x = a$ (dvs i ett intervall runt a) men inte nödvändigtvis i a.

Om $f(x)$ kan fås godtyckligt stort positivt genom att ta x tillräckligt nära a, så säger vi att

$$f(x) \text{ går mot } \infty \text{ då } x \text{ går mot } a$$

och skriver detta som

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \text{ eller } f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \infty.$$

Om $f(x)$ kan fås godtyckligt stort negativt genom att ta x tillräckligt nära a, så säger vi att

$$f(x) \text{ går mot } -\infty \text{ då } x \text{ går mot } a$$

och skriver detta som

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \text{ eller } f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty.$$

Exempel 1.2.1

Vi har $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$ och $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-3}{(x-1)^2} = -\infty$.

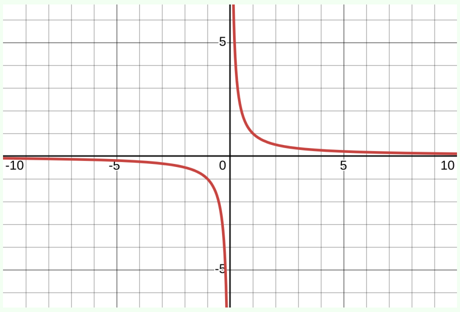
Anmärkning 1.2.2

Att $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ (eller $-\infty$) innebär inte att gränsvärdet existerar. Gränsvärdet existerar fortfarande inte, men vi inför detta skrivsätt eftersom det är ett mycket speciellt och vanligt sätt för ett gränsvärde att inte existera. Man skiljer alltså mellan tre fall: gränsvärdet existerar, gränsvärdet existerar inte pga att funktionen går mot ∞ eller $-\infty$, och att gränsvärdet inte existerar av andra skäl. Ett exempel på det tredje fallet såg vi i Exempel 1.1.10.

På samma sätt kan man tala om ensidiga gränsvärden. Vi lämnar det åt läsaren att fylla i definitionen av $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ och $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

Exempel 1.2.3

Funktionen $f(x) = \dfrac{1}{x}$ uppfyller $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ och $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$.



Detta visar också att funktionen inte går tvåsidigt mot ∞ eller $-\infty$. Gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ existerar inte, men inte genom att det går mot någon oändlighet.

Gränsvärden mot oändligheten

Låt oss gå tillbaka till funktionen i Exempel 1.2.3, men titta på hur funktionen beter sig för väldigt stora positiva (eller negativa) värden på x. Funktionsvärdet $1/x$ verkar närma sig 0 då x växer allt större. Att studera funktioners beteende "över lång tid" (om man tänker sig x som tid) är viktigt i många tillämpningar, och vi vill kunna säga sådant som att $1/x$ går mot 0 då x går mot oändligheten. Detta motiverar följande definition.

Definition 1.9

Om f är definierad på något intervall $[b, \infty)$ och $f(x)$ kan fås godtyckligt nära värdet L genom att ta x tillräckligt stort positivt, så säger vi att

$$f(x) \text{ går mot } L \text{ då } x \text{ går mot } \infty.$$

Med symboler skrivs detta som

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \text{ eller } f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} L.$$

Om f är definierad på något intervall $(-\infty, b]$ och $f(x)$ kan fås godtyckligt nära värdet L genom att ta x tillräckligt stort negativt, så säger vi att

$$f(x) \text{ går mot } L \text{ då } x \text{ går mot } -\infty.$$

Med symboler skrivs detta som

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \text{ eller } f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} L.$$

Exempel 1.2.4

Diskussionen ovan kan sammanfattas med att $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ och $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$.

På samma sätt kan man definiera $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ genom att $f(x)$ kan fås godtyckligt stort positivt genom att ta x tillräckligt stort positivt. Definitionerna av $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ och $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ görs på liknande sätt.

Exempel 1.2.5

Beräkna

a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x^2+x}$ b) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+1}{x^2+x}$ c) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+1}{x^2+x}$

Lösning. När x går mot ∞ eller $-\infty$ är växer höga potenser av x snabbare än låga potenser. De styr alltså beteendet, så vi bryter ut den högsta potensen i täljare och nämnare.

$$\text{a) } \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x^2+x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(2+1/x)}{x^2(1+1/x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(2+1/x)}{x(1+1/x)} = 0$$

eftersom uttrycken inom parentes går mot 2 resp. 1 medan $x \to -\infty$.

$$\text{b) } \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+1}{x^2+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(2+1/x^2)}{x^2(1+1/x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2+1/x^2)}{(1+1/x)} = \frac{2}{1} = 2.$$

$$\text{c) } \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+1}{x^2+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3(2+1/x^3)}{x^2(1+1/x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(2+1/x^2)}{(1+1/x)} = \infty.$$

När funktionen är ett rationellt uttryck (en kvot mellan två polynom) så styrs alltså gränsvärdet av de högsta potenserna och deras koefficienter. I allmänhet behöver beteendet då $x \to \infty$ och $x \to -\infty$ inte ha något med varandra att göra.

Exempel 1.2.6

Beräkna

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Lösning. Vi bryter ut högsta potens och får

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2(1+1/x^2)}} = \frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+1/x^2}}$$

och eftersom $\sqrt{x^2} = |x|$ så är detta lika med

$$\frac{x}{|x|}\frac{1}{\sqrt{1+1/x^2}}.$$

Uttrycket innanför roten går mot 1 både då $x \to \infty$ och då $x \to -\infty$. Notera dock att $\frac{x}{|x|} = \operatorname{sgn}(x) = 1$ då $x > 0$ och $\frac{x}{|x|} = \operatorname{sgn}(x) = -1$ då $x < 0$. Därför blir gränsvärdet i a) lika med 1 och gränsvärdet i b) lika med -1.

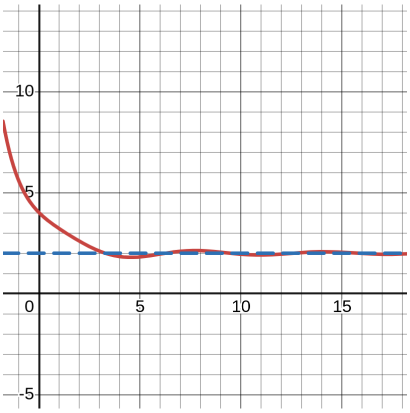
Klämsatsen gäller även för gränsvärden då $x \to \infty$ och $x \to -\infty$. Det är en bra övning att formulera detta precist.

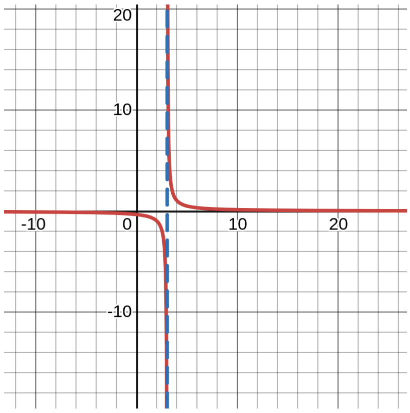
Asymptoter

Låt oss tolka dessa oändligheter geometriskt. I fallet då $f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} L$ eller $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} L$ närmar sig funktionens graf den vågräta linjen $y = L$ då $x \to \infty$ respektive $x \to -\infty$. En sådan linje kallas för en *vågrät* eller *horisontell asymptot*. En vågrät asymptot är alltså en vågrät linje som funktionen följer då x går mot positiva eller negativa oändligheten. På samma sätt talar man om en *lodrät* eller *vertikal asymptot* $x = a$ då funktionsvärdet går mot oändligheten när x går mot a från ena eller båda sidor.[1] Närmare bestämt har vi följande. I den vänstra figuren nedan är $y = 2$ en vågrät

[1] Observera att $x = a$ är ekvationen för en linje: den lodräta linjen som skär x-axeln i punkten $x = a$.

asymptot då $x \to \infty$. I den högra figuren är $y = 0$ en vågrät asymptot både då $x \to \infty$ och då $x \to -\infty$, och $x = 3$ är en lodrät asymptot.





Definition 1.10

Om $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ säger man att linjen $y = L$ är en **vågrät** eller **horisontell asymptot till kurvan** $y = f(x)$ **då** $x \to \infty$.

Om $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ säger man att linjen $y = L$ är en **vågrät** eller **horisontell asymptot till kurvan** $y = f(x)$ **då** $x \to -\infty$.

Man säger att linjen $x = a$ är en **lodrät** eller **vertikal asymptot till kurvan** $y = f(x)$ om minst ett av villkoren $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$ eller $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ är uppfyllt.

Exempel 1.2.7

Kurvan $y = \frac{1}{x}$ har den horisontella asymptoten $y = 0$ då $x \to \infty$ och $x \to -\infty$ och den vertikala asymptoten $x = 0$.

Vi återkommer till asymptoter i Avstitt 2.12 när vi skissar grafer.

1.3 Kontinuitet

Intuitivt tänker vi oss en kontinuerlig funktion som en funktion vars graf man kan rita utan att lyfta pennan. Detta visar sig vara en konsekvens av vår definition av kontinuitet. Definitionen talar om vad det innebär att vara kontinuerlig i en punkt a. Idén är att funktionens värde i punkten, dvs $f(a)$, ska vara precis det som $f(x)$ närmar sig då x närmar sig a. Detta eliminerar att funktionen t ex gör ett hopp i a. Med andra ord: genom att ta x tillräckligt nära a så kan vi få $f(x)$ hur nära $f(a)$ vi vill. Detta påminner om definitionen av gränsvärden, och mycket riktigt:

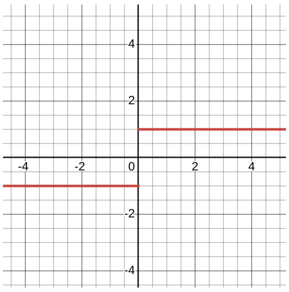
Definition 1.11

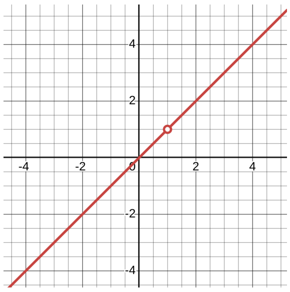
Vi säger att funktionen f är **kontinuerlig i** a om $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

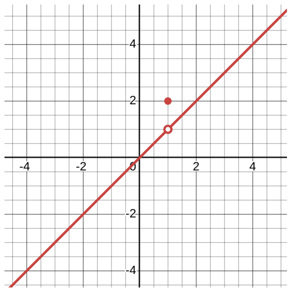
Denna likhet rymmer tre villkor:

- $\lim_{x \to a} f(x)$ är definierat (dvs är ett reellt tal),
- $f(a)$ är definierat (dvs a tillhör f:s definitionsmängd), och
- $\lim_{x \to a} f(x)$ är lika med $f(a)$.

Om funktionen inte är kontinuerlig i a säger vi att den är *diskontinuerlig* i a, eller att den har en *diskontinuitet* där. Detta kan ske på olika sätt.







Den vänstra funktionen $f = \text{sgn}$ är diskontinuerlig i 0 pga att varken gränsvärdet eller funktionsvärdet är definierat. Den mellersta funktionen är diskontinuerlig i 1 pga att funktionsvärdet är odefinierat. Den högra funktionen är diskontinuerlig i 1 pga att funktionsvärdet och gränsvärdet är olika.

Idé

Låt oss fördjupa oss mer i definitionen av kontinuitet. Att $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ innebär, enligt gränsvärdets definition, att $f(x)$ *kan fås godtyckligt nära* $f(a)$ *genom att ta* x *tillräckligt nära* a, eller med andra ord att storleken på avvikelsen $f(x) - f(a)$ kan göras så liten vi vill genom att storleken på skillnaden $x - a$ görs tillräckligt liten. Att

f är kontinuerlig innebär alltså att när x bara skiljer sig lite från a så skiljer sig värdet $f(x)$ bara lite från $f(a)$. Detta kan vi göra mer precist med den formella definitionen av gränsvärden. Enligt den betyder $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ att *för varje (felmarginal)* $\varepsilon > 0$ *finns det ett avstånd* $\delta > 0$ *så att*

$$f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon \quad \text{så länge} \quad a - \delta < x < a + \delta,$$

dvs

$$-\varepsilon < f(x) - f(a) < \varepsilon \quad \text{så länge} \quad -\delta < x - a < \delta,$$

eller med andra ord att avvikelsen i funktionsvärdet kan hållas hur liten vi vill (mindre än vilket ε som helst) så länge avståndet i x-led är tillräckligt litet (mindre än δ).

Man kan definiera ensidig kontinuitet genom att istället använda ensidiga gränsvärden.

Definition 1.12

Funktionen f sägs vara **högerkontinuerlig i** a om $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ och **vänsterkontinuerlig i** a om $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

Om (och endast om) båda är uppfyllda är alltså f kontinuerlig i a.

Anmärkning 1.3.1

Ifall f bara är definierad på ena sidan om a, säger man att f är kontinuerlig i a om den är kontinuerlig från den sida som funktionen är definierad på. Till exempel är $f(x) = \sqrt{x}$ kontinuerlig i 0, eftersom den är kontinuerlig från den enda sida som den är definierad på. Detta är en praktisk konvention.

Exempel 1.3.2

Heavisidefunktionen H definieras som

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \textbf{om } x \geq 0 \\ 0 & \textbf{om } x < 0 \end{cases}$$

Alltså är $\lim_{x\to 0^+} H(x) = 1 = H(0)$ men $\lim_{x\to 0^-} H(x) = 0 \neq H(0)$. Den är därför högerkontinuerlig, men inte vänsterkontinuerlig, i 0.

Vi har talat om kontinuitet i en punkt, dvs lokalt. Ofta är man intresserad av kontinuitet i mer global bemärkelse.

Definition 1.13

Vi säger att funktionen f är **kontinuerlig på ett intervall** I om den är kontinuerlig i varje punkt på intervallet. Vi säger att f är **en kontinuerlig funktion**, eller, kortfattat, att f **är kontinuerlig**, om den är kontinuerlig på hela sin definitionsmängd.

Exempel 1.3.3

Funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ är en kontinuerlig funktion: från räknereglerna för gränsvärden följer det att $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ för alla $a > 0$. För $a = 0$ måste vi ta gränsvärdet enbart från höger, vilket räcker enligt föregående anmärkning.

Exempel 1.3.4

Funktionen $g(x) = \frac{1}{x}$ är inte kontinuerlig i 0, eftersom den inte är definierad där. Från räknereglerna för gränsvärden följer det att g är kontinuerlig överallt utom i 0. Den är därför en kontinuerlig funktion (!), eftersom den är kontinuerlig på hela sin definitionsmängd.

Många funktioner är kontinuerliga, enligt följande sats.

Sats 1.14

Följande funktioner är kontinuerliga:

- polynom
- rationella funktioner (dvs kvoter av polynom)
- funktionen $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ där $m, n \in \mathbb{Z}$
- absolutbeloppsfunktionen, och
- de trigonometriska funktionerna sin, cos och tan.

Bevis: Man kan härleda detta (utom för de trigonometriska funktionerna) från räknereglerna för gränsvärden (Sats 1.4). Vi gör detta för absolutbeloppet genom att notera att $|x| = \sqrt{x^2}$, så

$$\lim_{x \to a} |x| = \lim_{x \to a} \sqrt{x^2} = \sqrt{\lim_{x \to a} x^2} = \sqrt{\left(\lim_{x \to a} x\right)^2} = \sqrt{a^2} = |a|$$

där vi använde gränsvärdet $\lim_{x \to a} x = a$ från Sats 1.3. Vi utelämnar beviset för de trigonometriska funktionerna.

Men detta är inte allt! Nästa sats säger att vi kan kombinera kontinuerliga funktioner för att få (nya) kontinuerliga funktioner.

Sats 1.15

Om f och g är två funktioner som är kontinuerliga i a, så är även $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ och f/g (om $g(a) \neq 0$) kontinuerliga i a. Om $k \in \mathbb{R}$ är en konstant så är även kf kontinuerlig i a.

Även denna sats kan bevisas utifrån Sats 1.4.

Exempel 1.3.5

Funktionen $f(x) = x \sin x + 3x^2 \cos x$ är kontinuerlig överallt på $\mathbb{R}$.

Exempel 1.3.6

Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieras av

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 - 1 & \text{om } x < 2 \\ d & \text{om } x = 2 \\ \operatorname{sgn}(x-2) & \text{om } x > 2 \end{cases}$$

där c och d är reella konstanter. För vilka värden på c och d är f kontinuerlig överallt?

Lösning. Funktionen är kontinuerlig på intervallet $(-\infty, 2)$ eftersom $kx^2 - 1$ är kontinuerlig överallt, oavsett vad k är. Funktionen är även kontinuerlig på $(2, \infty)$ eftersom $\operatorname{sgn}(x-2)$ är konstant 1 på detta intervall. Det återstår att verifiera att den är kontinuerlig i just 2. Vi har

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \operatorname{sgn}(x-2) = 1,$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} cx^2 - 1 = 4c - 1,$$

och $f(2) = d$. Därför är f kontinuerlig i 2 om och endast om

$$1 = 4c - 1 = d$$

vilket är uppfyllt om och endast om $c = \frac{1}{2}$ och $d = 1$.

Sats 1.16

Om f är kontinuerlig i a, och g är kontinuerlig i $f(a)$, så är sammansättningen $g \circ f$ kontinuerlig i a.

Beviset är intressant.

Bevis: Att f är kontinuerlig i a betyder per definition att

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

det vill säga att $f(x) \to f(a)$ då $x \to a$. Att g är kontinuerlig i $f(a)$ betyder på samma sätt att $g(y) \to g(f(a))$ då $y \to f(a)$.

Vi kombinerar dessa två samband genom att låta $y = f(x)$. När $x \to a$ så går $f(x) \to f(a)$ på grund av att f är kontinuerlig i a, och då går $g(f(x)) \to g(f(a))$ på grund av att g är kontinuerlig i $f(a)$. Men detta säger precis att

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(f(a)),$$

det vill säga

$$\lim_{x\to a} g \circ f(x) = g \circ f(a),$$

vilket skulle visas.

Exempel 1.3.7

Funktionen $f(x) = (x^2 + 1)^{1/3}$ är kontinuerlig överallt på $\mathbb{R}$.

Kontinuerliga funktioner på slutna begränsade intervall

Kontinuerliga funktioner på slutna och begränsade intervall har särskilt bra egenskaper. Att ett intervall är **begränsat** betyder att det är ändligt långt, och att det är **slutet** betyder att ändpunkterna ingår. Ett sådant intervall är alltså på formen $[a, b]$, där $a, b \in \mathbb{R}$.

Sats 1.17: Max-min-satsen

Om f är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$, så antar den ett största och ett minsta värde på intervallet, dvs det finns en punkt $M \in [a, b]$ sådan att $f(M) \geq f(x)$ för alla $x \in [a, b]$, och en punkt $m \in [a, b]$ sådan att $f(m) \leq f(x)$ för alla $x \in [a, b]$.

Värdet $f(M)$ är alltså störst bland alla möjliga värden som $f(x)$ är på intervallet, och kallas för ett globalt eller absolut maximum. På motsvarande sätt är $f(m)$ det minsta värde som f antar på intervallet, och kallas för ett globalt eller absolut minimum. Observera att en funktion kan anta sitt globala maximum (och global minimum) i flera punkter.

Orden *globalt* och *absolut* ska ses in kontrast mot *lokala* maxima och mimima, dvs värden som är störst eller minst på en del av definitionsmängden. Mer precist har vi följande.

Definition 1.18

Vi säger att en funktion f har ett **globalt** eller **absolut maximum** i punkten x_0 om $f(x_0) \geq f(x)$ för alla $x \in D_f$, och att f har ett **globalt** eller **absolut minimum** i punkten x_0 om $f(x_0) \leq f(x)$ för alla $x \in D_f$.

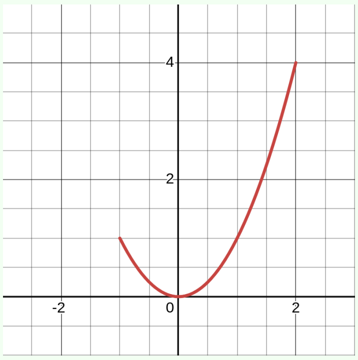
(Kom ihåg att D_f är definitionsmängden till f.)

Vi säger att en funktion f har ett **lokalt maximum** i punkten x_0 om $f(x_0) \geq f(x)$ för alla $x \in D_f$ inom något avstånd d till x_0, och att f har ett **lokalt minimum** i punkten x_0 om $f(x_0) \leq f(x)$ för alla $x \in D_f$ inom något avstånd d till x_0.

Den punkt x_0 där funktionen har ett globalt maximum kallas för en **global maximipunkt** eller **global maxpunkt**. På liknande sätt definieras begreppen **lokal max(imi)punkt** samt **lokal** och **global min(imi)punkt**.

Exempel 1.3.8

Funktionen $f(x) = x^2$ på intervallet $[-1, 2]$ har ett globalt minumum i $x = 0$ och ett globalt maximum i $x = 2$.



Om intervallet hade varit $[-1, 2)$ hade det inte funnits någon maximipunkt; $f(x)$ kommer allt närmare 4 ju närmare x kommer till 2, men det finns inget största värde som antas på intervallet. Detta visar att det är nödvändigt att intervallet är slutet.

Om istället intervallet hade varit $[-1, \infty)$ hade det inte heller funnits någon maximipunkt; $f(x)$ växer allt större ju större x är, och det finns inget största värde som antas på intervallet. Detta visar att det är nödvändigt att intervallet är begränsat.

Funktionen $g(x) = \frac{1}{x}$ saknar max- och minpunkt på intervallet $[-1, 2]$, eftersom funktionen går mot $\pm\infty$ på intervallet. Detta visar att f måste vara kontinuerlig *på hela intervallet*.

Betrakta $h(x) = \sin x$ på intervallet $[0, 4\pi]$. Den har maximipunkterna $\frac{\pi}{2}$ och $\frac{5\pi}{2}$, och minimipunkterna $\frac{3\pi}{2}$ och $\frac{7\pi}{2}$. Detta är inget problem: satsen säger inte att max- eller minpunkten måste vara unika.

Beviset till satsen är något invecklat och vi hoppar över det. En konsekvens av satsen är att en kontinuerlig funktion på ett slutet intervall är **begränsad**, dvs går inte mot ∞ eller $-\infty$, eftersom detta skulle strida mot att den antar ett största och minsta värde.

Vi avslutar med en sats som, så att säga, fångar essensen av kontinuerliga funktioner, och i princip säger att deras graf kan ritas utan att lyfta pennan.

Sats 1.19: Satsen om mellanliggande värden

Antag att f är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$. För varje y mellan $f(a)$ och $f(b)$ finns det $x \in [a, b]$ så att $f(x) = y$.

Funktionen gör alltså inga hopp utan antar varje värden y mellan $f(a)$ och $f(b)$ minst en gång. För att uppskatta vikten av detta kan vi titta på vad som händer om f inte är kontinuerlig. Heavisidefunktionen H är till exempel inte kontinuerlig på intervallet $[-1, 1]$. Den uppfyller $H(-1) = 0$ och $H(1) = 1$, men det finns ingen punkt $x \in [-1, 1]$ där exempelvis $H(x) = \frac{1}{3}$.

Exempel 1.3.9

Visa att ekvationen $x^3 - x - 1 = 0$ har minst en lösning på intervallet $[1, 2]$.

Lösning. Funktionen $f(x) = x^3 - x - 1$ är kontinuerlig och uppfyller $f(1) = -1$ och $f(2) = 5$. Eftersom 0 ligger mellan -1 och 5 så följer det från Satsen om mellanliggande värden att $f(x) = 0$ för något $x \in [1, 2]$. Alltså finns det minst en lösning $x \in [1, 2]$ till $x^3 - x - 1 = 0$.

2 Derivatan

Vi har nu verktygen som behövs för att kunna definiera och studera derivatan av en funktion. Det visar sig att derivatan, som är ett mått på hur snabbt en funktion förändras, säger mycket om funktionen. Med hjälp av derivatan kan man dessutom få noggranna approximationer av många funktioner, som används inte minst när datorer ska behandla funktioner.

2.1 Derivatan som koncept

Från idé till definition

Idé

Om vi har en funktion f definierad på ett intervall runt punkten $x_0 \in \mathbb{R}$, så vill vi kunna tala om funktionens *förändringshastighet i punkten* x_0. Vi ska nu komma fram till en rimlig definition av detta, som också går att räkna med.

Vi börjar med att undersöka hur snabbt funktionen förändras när variabeln ändras litegrann. I punkten x_0 är funktionsvärdet $f(x_0)$, och i punkten $x = x_0 + h$ är funktionsvärdet $f(x) = f(x_0 + h)$. Här tänker vi oss x nära x_0, dvs h är ett litet (positivt eller negativt) steg. Förändringen är

$$\Delta y = f(x) - f(a) = f(x_0 + h) - f(a)$$

medan förändringen i x är

$$\Delta x = (x_0 + h) - x_0 = h$$

så den genomsnittliga förändringshastigheten ges av den så kallade differenskvoten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Exempel 2.1.1

Om $f(x) = x^2$, så får vi

$$\Delta y = f(x_0+h)-f(x_0) = (x_0+h)^2-x_0^2 = x_0^2+2x_0h+h^2-x_0^2 = 2x_0h+h^2$$

så

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0h + h^2}{h} = 2x_0 + h.$$

Om exempelvis $x_0 = 3$ så blir detta $6 + h$.

Eftersom vi vill tala om förändringshastigheten i punkten x_0 och inte mellan x_0 och $x_0 + h$, så vill vi låta h vara mycket litet. I exemplet ser vi att om h är mycket litet, så är $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx 2x_0$, som är ett reellt tal. Med hjälp av gränsvärden kan vi göra det mer precist: $2x_0 + h$ går mot $2x_0$ då h går mot 0.

Anmärkning 2.1.2

Ett annat sätt att tänka på detta är följande: om vi känner till funktionens värde i x_0 så kan vi uttrycka värdet i $x = x_0 + h$ som

$$f(x) = x^2 = (x_0 + h)^2 = x_0^2 + 2x_0h + h^2 = x_0^2 + h(2x_0 + h).$$

Detta tolkar vi som att när vi går h steg från x, så ändras funktionsvärdet med en faktor gånger h. Den faktorn är $2x_0 + h$, och för mycket små h är detta ungefär lika med $2x_0$. Detta är grunden i våra approximationer, som vi återkommer till i kapitel 2.14 och 2.15

I allmänhet är det alltså rimligt att definiera förändringshastigheten i punkten x_0 som $\lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Eftersom det är ett gränsvärde måste vi reservera oss för det fall att det inte är definierat.

Definition 2.1

Vi säger att funktionen f är **deriverbar i** x_0 om gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existerar. I så fall kallar vi detta gränsvärde för **derivatan av** f **i** x_0 och betecknar det som $f'(x_0)$.

Vi har alltså

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

där $x = x_0 + h$.

Anmärkning 2.1.3

Observera att i gränsvärdet går h mot 0, medan x_0 så att säga “står still”. I gränsvärden med flera obekanta är det alltid viktigt att hålla reda på vad som rör sig och vad som inte gör det.

Exempel 2.1.4

Vi kan nu göra förra exemplet mer precist. För $f(x) = x^2$ gäller $f'(x_0) = 2x_0$, så exempelvis är $f'(3) = 6$.

Exempel 2.1.5

Betrakta funktionen $g(x) = x$. Derivatan i en allmän punkt x_0 är

$$g'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1.$$

Exempel 2.1.6

Betrakta funktionen $f(x) = |x|$. Derivatan i 0 är

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}.$$

Men $\frac{|h|}{h} = \operatorname{sgn}(h)$ uppfyller

$$\lim_{h\to 0^+} \operatorname{sgn}(h) = 1 \quad \text{och} \quad \lim_{h\to 0^-} \operatorname{sgn}(h) = -1.$$

enligt Exempel 1.1.10. Gränsvärdet existerar alltså inte, och $f(x) = |x|$ är inte deriverbar i 0. Däremot är den deriverbar i alla andra punkter: om $x_0 > 0$ så är $|x| = x$ på båda sidor om x_0, och derivatan är 1 enligt förra exemplet. På samma sätt kan man visa (gör det!) att derivatan i $x_0 < 0$ är -1.

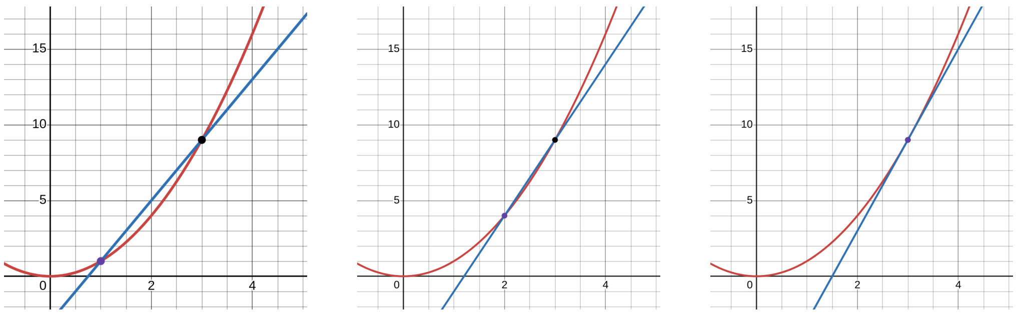
Exemplet ovan är anledningen till att man talar om högerderivata och vänsterderivata, som definieras med hjälp av högergränsvärde och vänstergränsvärde, dvs som

$$\lim_{h\to 0^+} \tfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{respektive} \quad \lim_{h\to 0^-} \tfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} ,$$

men vi kommer inte att använda dessa så ofta i denna kurs.

Geometrisk tolkning: tangentlinjen

Differenskvoten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ har en geometrisk tolkning som lutningen hos den linje som går igenom punkterna $(x_0, f(x_0))$ och $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Den andra punkten närmar sig den första då h närmar sig 0. I gränsvärdet $h \to 0$ har linjen övergått i en linje som tangerar kurvan i punkten $(x_0, f(x_0))$. Vi illustrerar detta för funktionen $f(x) = x^2$ och punkten $x_0 = 3$ i bildserien nedan. I den första figuren är $h = -2$, i den andra är $h = -1$, och i den



sista figuren har vi tagit gränsvärdet, så att linjen har riktningskoefficienten

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

som ju är 6 enligt Exempel 2.1.4. Detta tar vi som allmän definition av tangentlinjen hos till kurvan $y = f(x)$ i en punkt där funktionen är deriverbar.

Definition 2.2

Tangentlinjen till $y = f(x)$ **i** x_0 är den linje som går genom punkten $(x_0, f(x_0))$ och har riktningskoefficienten

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

om gränsvärdet existerar.

Exempel 2.1.7

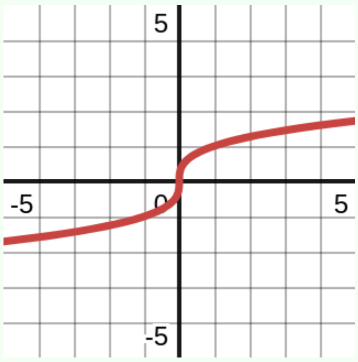
Tangentlinjen till $y = x^2$ i $x = 3$ går igenom punkten $(3, 9)$ och har, enligt ovan, riktningskoefficient 6. Linjens ekvation på enpunktsform blir $(y - 9) = 6(x - 3)$, vilket är ekvivalent med $y = 6(x - 3) + 9 = 6x - 9$.

Exempel 2.1.8

Låt $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$. Vi beräknar lutningen av tangenten i 0 och får

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(0+h)^{\frac{1}{3}} - 0^{\frac{1}{3}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}}.$$

Eftersom $h^{\frac{2}{3}} = (h^{\frac{1}{3}})^2 \geq 0$ och går mot 0 då $h \to 0$, går denna kvot mot oändligheten. Gränsvärdet existerar alltså inte, utan är ∞. Detta säger att funktionen inte är deriverbar. Geometriskt innebär en "oändlig lutning" att tangenten är vertikal, vilket svarar mot vad figuren till höger visar. Tangenten i 0 verkar alltså vara y-axeln, dvs linjen $x = 0$.



Det förra exemplet inspirerar till följande.

Anmärkning 2.1.9

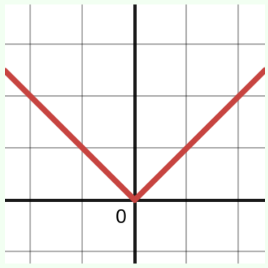
Om

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \infty \quad \text{eller} \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = -\infty$$

säger vi att tangenten till $y = f(x)$ i x_0 är vertikal. Den har då ekvationen $x = x_0$. Om gränsvärdet misslyckas med att existera på något annat sätt säger vi att kurvan $y = f(x)$ saknar tangent i x_0.

Exempel 2.1.10

Ett klassiskt exempel på en funktion som saknar en tangent i en punkt är $f(x) = |x|$ i punkten 0. Detta följer från Exempel 2.1.6. I figuren ser vi att grafen har ett "hörn" i origo, på så sätt att lutningen om man närmar sig från höger är 1 och från vänster -1. Därför är det rimligt att vi inte kan tala om en väldefinierad tangent i origo.



Kontinuerlig vs. deriverbar

Vi har nu två egenskaper som en funktion f kan ha — eller inte ha — i en viss punkt x_0. Å ena sidan kan f vara kontinuerlig där, vilket innebär att

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Å andra sidan kan f vara deriverbar där, vilket enligt omskrivningen efter definitionen innebär att

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existerar.}$$

Vi vet också att $f(x) = |x|$ är kontinuerlig i 0, men inte deriverbar i 0, så att vara kontinuerlig är inte en garanti för att vara deriverbar. Gäller det omvända? Är det alltså så att deriverbarhet är en garanti för kontinuitet? Svaret är ja, enligt följande.

Sats 2.3

Om f är deriverbar i x_0, så är den kontinuerlig i x_0.

Bevis: Vi utgår alltså från att

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existerar}$$

och vill visa att $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, dvs att $\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$. Vi skriver om $f(x) - f(x_0)$ som

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0).$$

Men då är

$$\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \right)$$

Gränsvärdet av den första faktorn är derivatan $f'(x_0)$, som vi har antagit existerar (och alltså är ett ändligt tal), medan gränsvärdet av $x - x_0$ är 0. Gränsvärdet av produkten är därför $f'(x_0) \cdot 0 = 0$, så $\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$, vilket är precis vad som skulle visas.

Derivatan som funktion

I Exempel 2.1.1 såg vi att $f(x) = x^2$ har derivatan $f'(x_0) = 2x_0$. Derivatan beror alltså på vad x_0 är, dvs är en funktion av x_0. Om vi kallar punkten för x istället för x_0 syns detta tydligare. Vi får alltså **derivatan av f med avseende på x**

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

som är definierad överallt där f är deriverbar. En annan beteckning för $f'(x)$ är $\frac{df}{dx}$. Om $y = f(x)$ skriver man även y' eller $\frac{dy}{dx}$. Observera att $\frac{df}{dx}$ och $\frac{dy}{dx}$ inte är bråk utan symboler inspirerade av det faktum att

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Ibland skriver man $\frac{df}{dx}$ som $\frac{d}{dx}f$; symbolen $\frac{d}{dx}$ betyder alltså “derivatan med avseende på x av”, och $\frac{df}{dx}$ betyder “derivatan med avseende på x av f”. Denna notation kallas för Leibniznotation; Isaac Newton och Gottfried Leibniz anses vara de som gav upphov till analysen, dvs kalkylen med derivator och integraler i slutet av 1600-talet.

Exempel 2.1.11

Om en partikel färdas längs en axel och $s(t)$ definieras som positionen hos partikeln vid tiden t, så är $\frac{ds}{dt}$ den momentana hastigheten av partikeln vid tiden t, eftersom detta är precis förändringshastigheten av positionen. Detta är alltså gränsvärdet då $\Delta x \to 0$ av $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, som ju är medelhastigheten under tiden Δt.

2.2 Grundläggande exempel och deriveringsregler

Grundläggande derivator

Vi ska nu ta fram formler för derivatan av grundläggande funktioner. Många funktioner kan fås som kombinationer av dessa, och därför är det bra att ha regler för att derivera sådana kombinationer (summor, produkter, kvoter osv). Detta gör vi i slutet av detta avsnitt.

Anmärkning 2.2.1: Teoretisk anmärkning om definitionsmängder

När man deriverar beräknar man derivatan, som är ett gränsvärde. Funktionen behöver därför vara definierad på båda sidor om punkten man är intresserad av, men det spelar ingen roll hur funktionen ser ut långt bort från punkten. När vi nu räknar ut $f'(x)$ för olika funktioner, utgående från ett uttryck (en formel) för $f(x)$, kommer vi alltså alltid att anta att f är definierad av detta uttryck i ett intervall (a, b) där x ingår. Ofta är f definierad på hela $\mathbb{R}$, men vi är nöjda så länge den är definierad i ett litet intervall. Att vi tar ett öppet intervall (a, b), dvs utan ändpunkter, är för att garantera att x själv inte är en ändpunkt, så att funktionen är definierad på båda sidor om x.

Vi har redan sett att $\frac{d}{dx}x = 1$ (dvs att $f(x) = x$ uppfyller $f'(x) = 1$) och $\frac{d}{dx}x^2 = 2x$ för alla $x \in \mathbb{R}$. För konstanta funktioner $f(x) = C$ gäller $f'(x) = 0$, eftersom

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{C - C}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Vi ska härleda en allmän formel för $\frac{d}{dx}x^n$, där n är ett positivt heltal, och så småningom utvidga detta till mer allmänna n. Vi börjar med x^3:

om $f(x) = x^3$ så är $f(x+h) = (x+h)^3$, och binomialsatsen ger

$$(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$

och

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\cancel{x^3} + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - \cancel{x^3}}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2.$$

Notera hur termerna utan h tog ut varandra, och divisionen med h lämnade kvar en term utan h. Resten av termerna går mot 0 då $h \to 0$, och gränsvärdet, dvs derivatan, blir $f'(x) = 3x^2$.

Precis samma sak kommer att hända med $f(x) = x^n$ där n är ett positivt heltal: binomialsatsen[1] ger

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\cancel{x^n} + h^2(\ldots) - \cancel{x^n}}{h} = nx^{n-1} + (\cdots)h$$

som går mot $f'(x) = nx^{n-1}$ då $h \to 0$. Vi har alltså $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ för varje $x \in \mathbb{R}$.

Specialfallen då n är 1, 2 eller 3 har vi redan sett ovan. Vi kommer senare att utvidga denna sats till att gälla alla reella n. Specialfallet $n = \frac{1}{2}$, dvs funktionen $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$, tar vi dock separat redan här; gränsvärdesberäkningen är av en typ vi redan sett.

Exempel 2.2.2

Låt $f(x) = \sqrt{x}$. För varje $x > 0$ har vi

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x} + h - \cancel{x}}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},
\end{aligned}$$

[1]Kom ihåg att den säger att

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xh^{n-1} + h^n.$$

så $\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Vi sammanfattar det vi vet såhär långt.

Sats 2.4

Följande funktioner är deriverbara på följande områden med följande derivator

$f(x)$	$f'(x)$	deriverbar då
konstant	0	$x \in \mathbb{R}$
$x^n \ (n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}	$x \in \mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
$\lvert x\rvert$	$\operatorname{sgn} x$	$x \neq 0$

Deriveringsregler

Många funktioner fås genom att kombinera enklare funktioner genom att addera, subtrahera, skala om, multiplicera och dividera dem. Istället för att använda derivatans definition varje gång, är det praktiskt att ha deriveringsregler för sådana kombinationer av funktioner. Dessa regler härleds, en gång för alla, från derivatans definition. Vi börjar med derivatan av summor, differenser och omskalningar.

Sats 2.5

Om f och g är deriverbara i x, så är $f+g$, $f-g$ och kf också det (där $k \in \mathbb{R}$ är en konstant), och

a) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,

b) $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$,

c) $(kf)'(x) = k \cdot f'(x)$.

Beviset är en bra övning på definitionen.

Exempel 2.2.3

Vi har
$$\frac{d}{dx}(5x + x^7 - \sqrt{x} + 3) = 5 + 7x^6 - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

För produkter och kvoter fungerar det inte på samma sätt. Att derivatan av $f(x)g(x)$ i allmänhet *inte* är $f'(x)g'(x)$ ser man t ex om $f(x) = 1$ och $g(x) = x$: derivatan av produkten är 1, medan produkten av derivatorna är 0. Istället har vi följande.

Sats 2.6: Produktregeln

Om f och g är deriverbara i x, så är $f \cdot g$ också det, och
$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Bevis: Vi utgår från definitionen, men med ett trick: vi adderar och subtraherar termen $f(x)g(x+h)$ i täljaren nedan. Per definition är $(f \cdot g)'(x)$ lika med

$$\begin{aligned}
& \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
= \; & \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
= \; & \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} \\
= \; & \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right).
\end{aligned}$$

Vi känner igen differenskvoterna för f och g. Eftersom f och g är deriverbara i x går den första kvoten mot $f'(x)$ och den andra mot $g'(x)$. Att g är deriverbar medför att den är kontinuerlig i x enligt sats 2.3, vilket innebär att $g(x+h) \to g(x)$ då $h \to 0$. Ovanstående är därför lika med
$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$
vilket skulle visas.

Exempel 2.2.4

Vi har

$$\frac{d}{dx}\left((x^3+x)\sqrt{x}\right) = (3x^2+1)\sqrt{x} + (x^3+x)\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Anmärkning 2.2.5

Med hjälp av produktregeln kan man steg för steg derivera produkter av fler än två faktorer. T ex har vi

$$(fgh)' = f'(gh) + f(gh)' = f'gh + f(g'h+gh') = f'gh + fg'h + fgh'.$$

För att komma till en regel för derivatan av en kvot, gör vi först ett mellansteg som är intressant i sig: derivatan en kvot med täljare 1.

Sats 2.7

Om g är deriverbar i x och $g(x) \neq 0$, så är

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g(x)}\right) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

Bevis: Vi bevisar satsen under antagandet att inte bara $g(x) \neq 0$, utan även $g(x+h) \neq 0$ för $x+h$ nära x, dvs för h inom något intervall kring 0, så att vi kan dela med $g(x+h)$. Man kan anpassa argumentet för att visa satsen i allmänhet, men vi utelämnar det.

Per definition är

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g(x)}\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)-g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(-\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\right),
\end{aligned}$$

och på samma sätt som i förra beviset går den första kvoten mot $g'(x)$ och $g(x+h)$ mot $g(x)$. Detta ger den önskade formeln för derivatan.

Exempel 2.2.6

Som en tillämpning av denna sats kan vi derivera negativa potenser av x. Om $n < 0$ gäller $n = -m$, där m är positivt. Då vet vi sedan tidigare att derivatan av x^m är mx^{m-1}, och satsen ovan kan användas så att

$$\frac{d}{dx}x^n = \frac{d}{dx}x^{-m} = \frac{d}{dx}\frac{1}{x^m} = -\frac{mx^{m-1}}{(x^m)^2} = -mx^{m-1}x^{-2m} = -mx^{-m-1}.$$

Eftersom $-m = n$ så är detta precis nx^{n-1}. Slutsatsen blir att derivatan av x^n ges av samma formel vare sig n är positivt eller negativt. Om $n < 0$ är dock x^n inte definierad i 0, och därför förstås inte heller deriverbar där.

För att derivera en allmän kvot $f(x)/g(x)$ kan vi skriva kvoten som en produkt:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\frac{1}{g(x)}.$$

Kombinerar vi produktregeln med den senaste satsen får vi derivatan av detta till

$$f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)\frac{-g'(x)}{g(x)^2},$$

och förlänger vi det första bråket med $g(x)$ och skriver på gemensam nämnare så har vi bevisat följande.

Sats 2.8: Kvotregeln

Om f och g är deriverbara i x, och $g(x) \neq 0$, så är

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Exempel 2.2.7

Vi har

$$\frac{d}{dx}\frac{x^2+1}{x^3+5x} = \frac{2x(x^3+5x) - (x^2+1)(3x^2+5)}{(x^3+5x)^2}.$$

Kedjeregeln

Vad är derivatan av $\sqrt{x^4+1}$? Detta är en sammansatt funktion, på formen $f \circ g(x) = f(g(x))$. Derivatan av sådana funktioner kan beräknas med hjälp av kedjeregeln.

Sats 2.9: Kedjeregeln

Om g är deriverbar i x och f är deriverbar i $g(x)$, så är $g \circ f$ deriverbar i x, och
$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x).$$

Funktionen f är den yttre funktionen i sammansättningen, och därför kallas $f'(g(x))$ för den *yttre derivatan*. Funktionen g är den inre funktionen och därför kallas $g'(x)$ för den inre derivatan. Observera att derivatan av den sammansatta funktionen $f \circ g$ alltså är en produkt av den yttre derivatan och den inre derivatan.

Exempel 2.2.8

Vi går tillbaka till $\sqrt{x^4+1}$, som vi kan tänka på som en sammansatt funktion $f(g(x))$ där $g(x) = x^4 + 1$ och $f(x) = \sqrt{x}$, så att $f(g(x)) = \sqrt{x^4+1}$. Med andra ord är f funktionen $\sqrt{}$.

Eftersom $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ så är

$$f'(g(x)) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} = \frac{1}{2\sqrt{x^4+1}}$$

och $g'(x) = 4x^3$. Enligt kedjeregeln blir därför

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{x^4+1}} 4x^3 = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+1}}.$$

Beviset till kedjeregeln är en gedigen övning i användningen av definitioner. Vi utelämnar det här.

Idé

I en sammansatt funktion $f \circ g$ är resultatet beroende av variabeln i två steg: f beror av g som beror av x. Om g:s beroende av x

förändras och f:s beroende av $g(x)$ samtidigt förändras (säg att den ena fördubblas och den andra trefaldigas), så är multipliceras dessa effekter för att ge den totala förändringen (i exemplet sexfaldigas resultatet). Eftersom derivatan är förändringshastigheten är det därför rimligt att den totala förändringshastigheten är produkten av $f'(g(x))$ (hur snabbt f ändras som funktion av $g(x)$) och $g'(x)$ (hur snabbt g ändras som funktion av x).

Ett annat sätt att se på kedjeregeln är som följer. Sätt $u = g(x)$ och $y = f(g(x))$. Den inre derivatan är då $g'(x) = \dfrac{du}{dx}$, medan den yttre derivatan är $f'(g(x)) = f'(u) = \dfrac{dy}{du}$. Derivatan av f med avseende på x är då $\dfrac{dy}{dx}$. Kedjeregeln säger då att

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Exempel 2.2.9

Vi återbesöker exemplet med $\sqrt{x^4+1}$ och sätter alltså $u = x^4 + 1$ och $y = \sqrt{x^4+1}$, så alltså $y = \sqrt{u}$. Då är

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \quad \text{och} \quad \frac{du}{dx} = 4x^3,$$

så kedjeregeln ger

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}4x^3 = \frac{1}{2\sqrt{x^4+1}}4x^3 = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+1}}$$

precis som förut.

Anmärkning 2.2.10

Det är upp till situationen (och ens personliga smak) vilket av de två notationerna man väljer: Newtons med f', g' osv, eller Leibniz med $\frac{dy}{dx}$ osv. Fördelen med Leibniznotationen är att kedjeregeln då ser ut som en bråkförkortning. Kom dock ihåg att $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{du}$ och $\frac{du}{dx}$ **inte är bråk** utan bara symboler. De är förvisso gränsvärden av bråken

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta y}{\Delta u}$ och $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, så man kan säga att kedjeregeln är "gränsvärdet av bråkförlängningen

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

då $\Delta x \to 0$".

Exempel 2.2.11

Beräkna

a) $\dfrac{d}{dt}(t^3 + 2t)^7$, b) $\dfrac{d}{dx}\sqrt{(x^2 + x)^4 + 3}$.

Lösning.

a) Vi ser detta som en sammansatt funktion $f(g(t))$ där $g(t) = t^3 + 2t$. Kedjeregeln ger

$$\frac{d}{dt}(t^3 + 2t)^7 = 7(t^3 + 2t)^6 \frac{d}{dt}(t^3 + 2t) = 7(t^3 + 2t)^6(3t^2 + 2).$$

b) Här får vi använda kedjeregeln upprepade gånger:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\sqrt{(x^2 + x)^4 + 3} &= \frac{1}{2\sqrt{(x^2 + x)^4 + 3}} \frac{d}{dx}(x^2 + x)^4 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{(x^2 + x)^4 + 3}} 4(x^2 + x)^3 \frac{d}{dx}(x^2 + x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{(x^2 + x)^4 + 3}} 4(x^2 + x)^3(2x + 1). \end{aligned}$$

Efter förenkling får vi alltså att derivatan är

$$\frac{2(x^2 + x)^3(2x + 1)}{\sqrt{(x^2 + x)^4 + 3}}.$$

Notera hur man själv väljer vad som betraktas som inre funktion. Ibland finns det flera naturliga val, och då spelar det ingen roll hur man delar upp funktionen. I b) ovan använde vi dessutom kedjeregeln upprepade gånger, genom att i varje steg "skala bort" ett lager (representerat av en färg), utifrån och in.

2.3 Tillämpning: relaterade förändringshastigheter

Kedjeregeln

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

kan tillämpas på situationer där två av de ingående tre derivatorna är kända (eller kan härledas) och den tredje är sökt. Vi tittar på ett par exempel som illustrerar den allmänna principen väl.

Exempel 2.3.1

En cirkulär aluminiumskiva expanderar under uppvärmning. Skivans radie ökar med 3 cm/s. Hur snabbt ökar skivans area i det ögonblick då radien är 8 cm?

Lösning. Vi inför lite notation: t betecknar tiden i sekunder, $r(t)$ radien i centimeter vid tiden t, och $A(t)$ arean i kvadratcentimeter vid tiden t. Observera att arean av cirkeln beror på radien: $A(t) = \pi r(t)^2$. Kedjeregeln beskriver hur deras förändringar hänger samman enligt

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr}\frac{dr}{dt}.$$

Vi vet att $\frac{dr}{dt} = 3$ och vi söker $\frac{dA}{dt}$. Från $A(t) = \pi r(t)^2$ får vi dessutom $\frac{dA}{dr} = 2\pi r(t)$. Så

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \cdot 3 = 6\pi r.$$

så när $r = 8$ cm är areaökningen $\frac{dA}{dt} = 48\pi$ cm^2/s.

Exempel 2.3.2

En isbit i form av en kub smälter på så sätt att dess volym minskar med konstant hastighet 6 mm^3/s. Med vilken hastighet minskar sidlängden i det ögonblick då den är 10 mm?

Lösning. Vi inför beteckningarna t för tiden i sekunder, $s(t)$ för sidlängden i millimeter vid tiden t och $V(t)$ för volymen i kubikmillimeter vid tiden t. Nu ger kedjeregeln

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{ds}\frac{ds}{dt}.$$

Nu känner vi till $\frac{dV}{dt} = -6$ (negativt då volymen minskar) och från formeln för kubens volym $V(t) = s(t)^3$ får vi $\dfrac{dV}{ds} = 3s(t)^2$. Sätter vi in detta i kedjeregeln får vi

$$-6 = 3s(t)^2\frac{ds}{dt}.$$

När sidlängden $s = 10$ mm kan vi lösa ut $\frac{ds}{dt} = \frac{-6}{300} = -\frac{1}{50}$. Sidlängden minskar alltså med en femtiondels millimeter i sekunden.

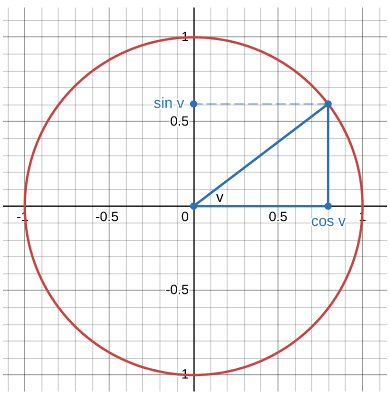
I allmänhet går man alltså till väga så att man inför de storheter som ingår och inför relevanta beteckningar. Kedjeregeln beskriver hur deras förändringshastigheter är relaterade till varandra, dvs ger ett samband mellan deras derivator. En av dessa derivator är den man söker, och de andra är antingen givna i uppgiften eller kan beräknas genom att derivera något känt samband, t ex en geometrisk formel för area eller volym.

2.4 Trigonometriska funktioners derivator

Vi ska nu använda det vi lärt oss för att härleda derivatan av funktionerna sin, cos och tan.

Repetition

Kom ihåg att $\sin v$ och $\cos v$ är definierade för varje $v \in \mathbb{R}$ med hjälp av enhetscirkeln (cirkeln med centrum i origo och radie 1). Vi räknar vinkeln v i radianer moturs från x-axeln; negativa vinklar svarar mot medurs riktning, och vinklar över 2π mot att man går längre än ett varv. Vinkeln är, per definition av en radian, längden av motsvarande cirkelbåge, tagen med tecken. Cirkelns omkrets är 2π,



så exempelvis svarar vinkeln $-\pi$ mot ett halvt varv medurs. Den punkt på cirkeln som detta svarar mot är $(-1, 0)$. I allmänhet svarar varje vinkel på detta sätt mot en punkt (x, y) på cirkeln, och man definierar $\cos v$ som x och $\sin v$ som y. I vårt exempel är alltså $\cos(-\pi) = -1$ och $\sin(-\pi) = 0$. Om $\cos v \neq 0$ definieras $\tan v$ som $\sin v / \cos v$.

Följande trigonometriska identiteter förutsätts vara välbekanta.

Sats 2.10

För alla $v \in \mathbb{R}$ gäller

a) $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$ (trigonometriska ettan),

b) $\sin(v \pm w) = \sin v \cos w \pm \cos v \sin w$,

c) $\cos(v \pm w) = \cos v \cos w \mp \sin v \sin w$,

d) $\sin(2v) = 2 \sin v \cos v$,

e) $\cos(2v) = \cos^2 v - \sin^2 v = 2\cos^2 v - 1 = 1 - 2\sin^2 v$,

f) $\sin(-v) = -\sin v$ och $\cos(-v) = \cos v$,

g) $\sin(\frac{\pi}{2} - v) = \cos v$ och $\cos(\frac{\pi}{2} - v) = \sin v$, och

h) $\sin(v + 2\pi k) = \sin v$, $\cos(v + 2\pi k) = \cos v$ och $\tan(v + \pi k) = \tan v$ för varje $k \in \mathbb{Z}$.

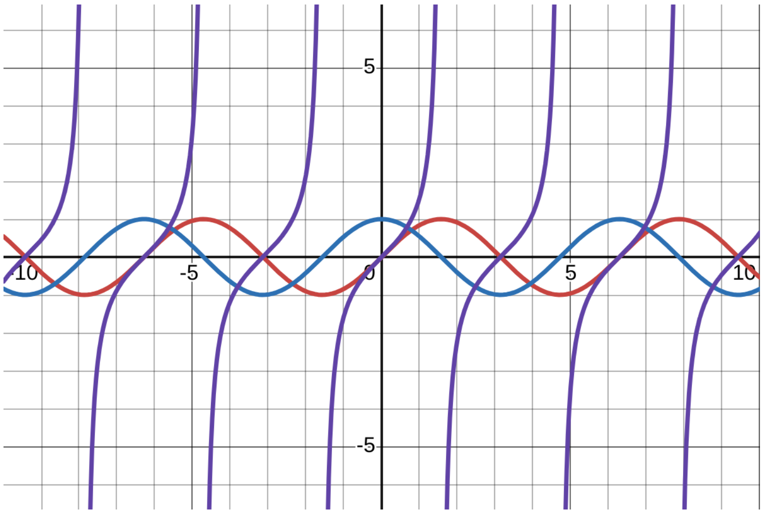
Anmärkning 2.4.1

Vi använder notationen $\cos^2 v$ för $(\cos v)^2$, för att inte förväxla detta med $\cos(v^2)$, och likaså skriver vi $\sin^2 v$ och $\tan^2 v$. Notationen i b) och c) betyder att i b) är tecknet i högerledet samma som i vänsterledet, medan det i c) är tvärtom. Påståendena d)-h) är konsekvenser av a)-c), förutsatt att man känner till vissa av standardvärdena

v	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin v$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos v$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0

Detta ger oss funktionerna $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, som enligt h) är periodiska med period 2π, och funktionen $\tan : D \to \mathbb{R}$, som är periodisk med period π. Definitionsmängden D till tan är mängden av alla $x \in \mathbb{R}$ med $\cos x \neq 0$, dvs alla reella tal som inte är udda multipler av $\frac{\pi}{2}$. Kurvorna $y = \sin x$, $y = \cos x$ och $y = \tan x$ ser ut som följer.

Föregående sats hjälper dig att avgöra vilken som är vilken, och g) förklarar dessutom varför kurvorna $y = \cos x$ och $y = \sin x$ fås från varandra genom förskjutning i x-led.



Derivator

Vi börjar med att derivera $f(x) = \sin x$, och vi använder derivatans definition för att avgöra var den är deriverbar och vad derivatan är. Använder vi additionsformeln för sinus och gör några omskrivningar så får vi

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sin x &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\sin x\frac{(\cos h-1)}{h}+\cos x\frac{\sin h}{h}\right) \\
&= \sin x\left(\lim_{h\to 0}\frac{(\cos h-1)}{h}\right)+\cos x\left(\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\right).
\end{aligned}$$

Som vi kommer att se i nästa sats är det första gränsvärdet 0 och det andra 1. Därför får vi

$$\frac{d}{dx}\sin x = (\sin x)\cdot 0 + (\cos x)\cdot 1 = \cos x.$$

Sats 2.11

a) $\lim_{h\to 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} = 0$ b) $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

Bevis: Båda satserna kan visas med ett geometriskt argument. Vi bevisar b), där både slutsatsen och beviset är särskilt intressanta.

Först observerar vi att det räcker att visa det ensidiga gränsvärdet

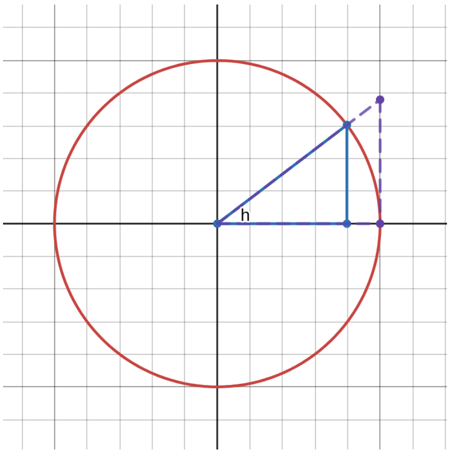
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\sin h}{h} = 1,$$

eftersom

$$\frac{\sin(-h)}{-h} = \frac{-\sin h}{-h} = \frac{\sin h}{h},$$

så om detta går mot 1 då h går mot 0 från den positiva sidan, gäller detsamma från den negativa sidan.

Låt alltså $h > 0$ och betrakta cirkelsektorn med vinkel h i enhetscirkeln, samt motsvarande omskrivande och inskrivna trianglar enligt figuren. Från geometriska samband kan vi beräkna den inre triangelns area till $\frac{\sin h}{2}$ och den yttre triangelns area till $\frac{\sin h}{2\cos h}$, medan cirkelsektorns area är $\frac{h}{2}$. Därför har vi



$$\frac{\sin h}{2} \leq \frac{h}{2} \leq \frac{\sin h}{2\cos h}$$

Om vi dividerar alla led med det positiva talet $\frac{\sin h}{2}$, vilket bevarar riktningarna på olikheterna, ser vi att detta är ekvivalent med

$$1 \leq \frac{h}{\sin h} \leq \frac{1}{\cos h}$$

och inverterar vi bråken (vilket vänder på olikheterna) ser vi att detta är ekvivalent med

$$1 \geq \frac{\sin h}{h} \geq \cos h.$$

Eftersom både 1 och $\cos h$ går mot 1 då $h \to 0$, följer det önskade gränsvärdet från klämsatsen.

Anmärkning 2.4.2

Att $\frac{\sin h}{h} \to 1$ då $h \to 0$ innebär, grovt sagt, att $\frac{\sin h}{h} \approx 1$ då h är nära 0, dvs $\sin h \approx h$ för små h. Denna så kallade *småvinkelsapproximation* används flitigt när man studerar svängningar i fysik. Vi kommer att göra den mer precis med hjälp av linjarisering i Avsnitt 2.14.

Med hjälp av kedje- och kvotregeln kan vi nu enkelt derivera $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ och $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Kedjeregeln ger

$$\frac{d}{dx} \sin(\tfrac{\pi}{2} - x) = \cos(\tfrac{\pi}{2} - x) \cdot (-1) = -\sin x,$$

och kvotregeln ger

$$\frac{d}{dx} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cos x - \cos x(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Man kan använda den trigonometriska ettan för att skriva om detta enligt

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Sammantaget har vi etablerat följande.

Sats 2.12

Funktionerna sin och cos är deriverbara på hela $\mathbb{R}$, med

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad \text{och} \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x,$$

medan tan är deriverbar på hela sin definitionsmängd, och

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

2.5 Högre ordningens derivator

Låt oss titta på följande motiverande exempel.

Exempel 2.5.1

En partikel är fäst i en fjäder och rör sig upp och ned. Partikelns position vid tiden t är $s(t) = \sin(\pi(t-2))$. Bestäm partikelns hastighet och acceleration vid tiden t.

Lösning. Hastigheten är positionens förändringshastighet, dvs derivata, som med kedjeregeln fås till $s'(t) = \pi\cos(\pi(t-2)$. Accelerationen är hastighetens förändringshastighet, alltså derivatan av derivatan

$$\frac{d}{dt}s'(t) = \frac{d}{dt}\left(\pi\cos(\pi(t-2))\right) = -\pi^2\sin(\pi(t-2)).$$

I många situationer behöver man alltså derivera flera gånger. Man talar då om andraderivata, tredjederivata osv. Antalet gånger man deriverat kallas för derivatans *ordning*.

Definition 2.13

Andraderivatan av f **med avseende på** x definieras som derivatan av derivatan f'. Den betecknas f'' eller $\frac{d^2}{dx^2}f$, eller oftare $\frac{d^2f}{dx^2}$.

Allmänt definieras n**:te derivatan av** f **med avseende på** x, även kallad **derivatan av ordning** n, rekursivt som derivatan av derivatan av ordning $n-1$. Den betecknas $f^{(n)}$ eller $\frac{d^n}{dx^n}f$, eller oftare $\frac{d^nf}{dx^n}$.

Exempel 2.5.2

Om $f(x) = x^3$ är $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f^{(3)}(x) = 6$ och $f^{(n)}(x)$ är den konstanta funktionen 0 för alla $n \geq 4$.

Anmärkning 2.5.3

På samma sätt som förstaderivatan är högre ordningens derivator alltså själva derivator, definierade som gränsvärden. Exempelvis gäller att

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}.$$

Detta gränsvärde behöver inte existera, även om $f'(x)$ existerar. För att överhuvudtaget skriva detta måste $f'(x+h)$ vara definierat, dvs f' måste vara definierad i ett intervall runt x. Inte ens då behöver $f''(x)$ existera. Den intresserade läsaren kan visa att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{om } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

är deriverbar överallt, med $f'(x) = 2|x|$. Men som vi sett förut är inte $|x|$, och därför inte heller $2|x|$, deriverbar i 0. Med andra ord är $f'(0) = 0$ medan $f''(0)$ är odefinierad. Detta är ett besvärligt beteende hos funktioner; de flesta av de funktioner vi kommer att studera i denna kurs är inte så besvärliga, men fenomenet kan uppstå, t ex om man arbetar med funktioner som kommer från modellering av experiment och kanske inte ges av ett kort och koncist matematiskt uttryck.

Anmärkning 2.5.4

Var förekommer högre ordningens derivator i tillämpningar? Andraderivator är mycket vanliga pga att accelerationen är en andraderivata. Newtons andra lag $F = ma$ säger att kraften F är proportionell mot accelerationen a (massan m är proportionalitetskonstanten), vilket innebär att andraderivator finns överallt där krafter verkar. Tredje- och fjärdederivator förekommer t ex i de differentialekvationer som modellerar hållfasthet hos bjälkar. I ekonomisammanhang är inflationen i princip derivatan av prisnivån. Andraderivatan beskriver inflationens förändringshastighet. Påståendet "ökningen av inflationen avtar" handlar om tredjederivatan. Detta lär den amerikanska presidenten Richard Nixon ha använt inför presidentvalet 1972, vilket beskrivits som den första gången en presidentkandidat använt tredjederivatan i en valkampanj.

2.6 Medelvärdessatsen

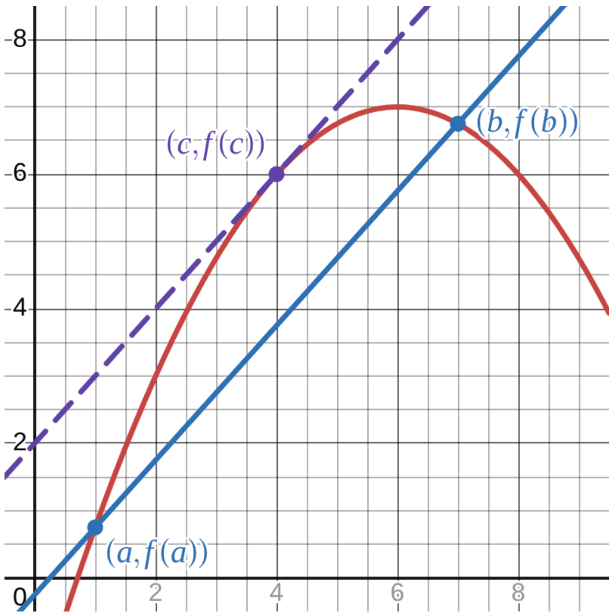
Vi kommer nu till den viktigaste satsen i detta kapitel: medelvärdessatsen. Den är på samma gång ett naturligt samband som man använder dagligen utan att tänka, och samtidigt en kraftfull sats som ligger till grund för nästan all användning av derivatan för att förstå en funktions beteende.

Sats 2.14: Medelvärdessatsen

Antag att f är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ och deriverbar på intervallet (a, b). Då finns det (minst) en punkt $c \in (a, b)$ sådan att

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

För att förstå satsens geometriska betydelse betraktar vi följande bild



Kurvan ges av $y = f(x)$ och den heldragna linjen skär kurvan i intervallets ändpunkter (en sådan linje kallas för en **sekant**). Vänsterledet i satsen är precis lutningen $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ hos denna linje. Högerledet är tangentens lutning i punkten $(c, f(c))$. Satsen säger alltså att *det finns minst en punkt på intervallet* (a, b) *där tangenten har samma lutning som sekanten.*

Notera att vänsterledet också kan tolkas som den genomsnittliga förändringshastigheten över intervallet. Idén bakom satsen kan då formuleras som följer.

Idé

Medelhastigheten över ett intervall är lika med den momentana hastigheten i någon punkt inne i intervallet.

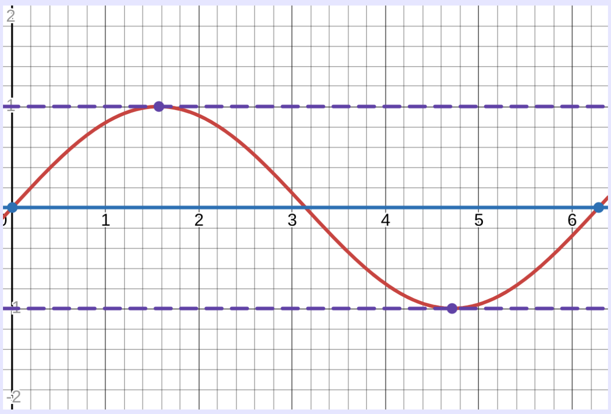
Anmärkning 2.6.1

a) Observera att satsen inte beskriver hur man hittar en sådan punkt c, utan bara att det finns en sådan punkt.

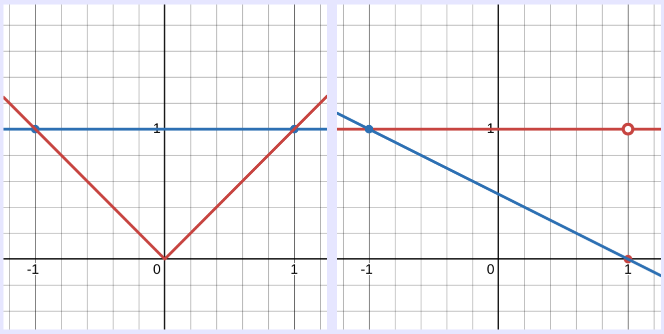
b) I allmänhet kan det finnas fler än en sådan punkt: betrakta funktionen $f(x) = \sin x$ på intervallet $[0, 2\pi]$. Vi har

$$\frac{\sin 2\pi - \sin 0}{2\pi - 0} = 0.$$

På intervallet $(0, 2\pi)$ uppfyller både $c = \frac{\pi}{2}$ och $c = \frac{3\pi}{2}$ att $f'(c) = 0$:



c) Villkoren att funktionen ska vara kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ (inklusive ändpunkterna) och deriverbar på (a, b) är viktiga. Om de inte är uppfyllda gäller inte satsen; nedan ser vi två motexempel med $a = -1$ och $b = 1$:



Den första funktionen $f(x) = |x|$ är inte deriverbar på intervallet $(-1, 1)$, och det finns ingen punkt på det intervallet där tangenten har samma lutning som den blå sekantlinjen. Den andra funktionen är definierad som $g(x) = 1$, utom i $x = 1$ där $g(1) = 0$. Den är alltså inte kontinuerlig på $[-1, 1]$. Inte heller här finns det någon punkt på $(-1, 1)$ där tangentens lutning är lika med sekantens.

Vi kommer att bevisa satsen i tre steg. Det första steget är en viktig sats i sig, medan huvudargumentet i beviset i princip sitter i det andra steget. Det tredje steget reducerar det allmänna fallet till det specialfall som behandlas i det andra steget.

Steg 1: derivatan i lokala extrempunkter

Sats 2.15

Om g är definierad på intervallet (a, b) och har en lokal max- eller minpunkt $c \in (a, b)$ där den är deriverbar, så är $g'(c) = 0$.

Bevis: Vi utför beviset ifall c är en minpunkt. Maxpunktsfallet är liknande och lämnas till läsaren. Att g är deriverbar i c innebär att

$$g'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{g(c+h) - g(c)}{h}$$

existerar, vilket innebär att

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{g(c+h) - g(c)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{g(c+h) - g(c)}{h}.$$

Eftersom c är en lokal minimipunkt gäller det att $g(c+h) \geq g(c)$ för alla h inom ett visst avstånd från c. Alltså är **täljaren icke-negativ** i både högerled och vänsterled. Däremot är **nämnaren negativ då** $h \to 0^-$ **och positiv då** $h \to 0^+$.

Högerledet är alltså gränsvärdet av ett bråk där täljaren är icke-negativ och nämnaren positiv. Ett sådant gränsvärde kan inte vara negativt. På samma sätt kan gränsvärdet i vänsterledet inte vara positivt. Eftersom gränsvärdena existerar och är lika med $g'(c)$, måste $g'(c)$ vara ett reellt tal som varken är positivt eller negativt. Det enda sådana talet är 0.

Steg 2: Rolles sats

Sats 2.16: M. Rolle, 1691

Antag att g är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ och deriverbar på intervallet (a, b), och uppfyller $g(a) = g(b)$. Då finns det (minst) en punkt $c \in (a, b)$ sådan att

$$g'(c) = 0.$$

Anmärkning 2.6.2

Observera att villkoren i Rolles sats är desamma som villkoren i medelvärdessatsen, med det extra villkoret att $g(a) = g(b)$. Under detta villkor gäller att

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = 0$$

så slutsatsen i Rolles sats är precis som i medelvärdessatsen att $\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(c)$. Rolles sats är alltså det specialfall av medelvärdessatsen där funktionen har samma värde i båda ändpunkterna. Sinusfunktionen i Anmärkning 2.6.1 uppfyller dessa villkor

Bevis: Max-minsatsen 1.17 säger att g har ett maximum och ett minimum på intervallet $[a, b]$. Det vi ska visa är att antingen maximum eller minimum ligger i en inre punkt, dvs i intervallet (a, b).

Kom ihåg att $g(a) = g(b)$; låt oss kalla detta gemensamma värde för V.

Om funktionen är konstant på $[a, b]$ så är varje punkt ett maximum och ett minimum, $g'(c) = 0$ är överallt, och saken är klar.

Om funktionen inte är konstant på $[a, b]$ finns det någon punkt $x \in (a, b)$ där $g(x) \neq V$, dvs antingen $g(x) > V$ eller $g(x) < V$.

Om $g(x) > V$ så måste funktionen anta sitt maximum på (a, b), dvs inte i ändpunkterna, eftersom värdet i ändpunkterna är mindre än värdet i x. I så fall har funktionen ett maximum $c \in (a, b)$, och enligt sats 2.15 är $g'(c) = 0$.

Om $g(x) < V$ så måste funktionen anta sitt minimum på (a, b), dvs inte i ändpunkterna, eftersom värdet i ändpunkterna är högre än värdet i x. I så fall har funktionen ett minimum $c \in (a, b)$, och enligt sats 2.15 är $g'(c) = 0$.

Detta fullbordar beviset.

Steg 3: medelvärdessatsen följer ur Rolles sats

Vi ska nu använda Rolles sats för att visa medelvärdessatsen.

Bevis: Givet är alltså en funktion f som är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b). Vi ska visa att det finns $c \in (a, b)$ så att

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

För att göra det definierar vi en funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ utifrån f på följande sätt:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Denna funktion må se konstig ut, men den har två viktiga egenskaper:

a) den uppfyller villkoren för Rolles sats, och

b) $g'(c) = 0 \iff f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Vi kontrollerar dessa egenskaper strax. Först noterar vi att egenskap a) medför att vi kan tillämpa Rolles sats, och dra slutsatsen att det finns en punkt $c \in (a, b)$ med $g'(c) = 0$; men då säger egenskap b) att $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$, vilket fullbordar beviset av medelvärdessatsen.

För att kontrollera a) noterar vi att g är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) eftersom f och $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$ har de egenskaperna; sedan beräknar vi

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = f(a) - 0 = f(a),$$

och

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{\cancel{b - a}}\cancel{(b - a)} = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a),$$

så $g(a) = g(b)$, och villkoren för Rolles sats är uppfyllda. För att kontrollera b) beräknar vi

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot 1$$

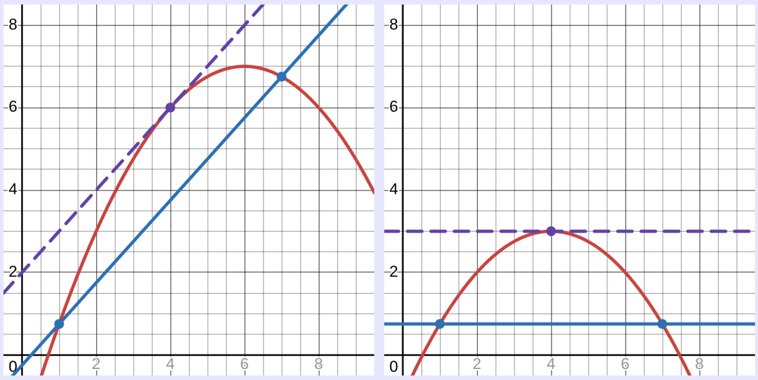
(eftersom kvoten är konstant och $\frac{d}{dx}(x - a) = 1$). Om $g'(c) = 0$ gäller alltså

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \iff f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Därmed är beviset klart.

Anmärkning 2.6.3

Funktionen g som vi konstruerade utifrån f fungerade alltså så att om Rolles sats gäller för g, så gäller medelvärdessatsen för f. Med andra ord reducerade den beviset av medelvärdessatsen till beviset av Rolles sats. Rent geometriskt är funktionen g ett slags deformation av f, som syftar till att göra sekantlinjen horisontell. figurerna visar graferna till f och g där f är funktionen från figuren i inledningen av detta avsnitt.



I detta fall är $g(x) = f(x) - (x - a)$, eftersom sekantens lutning är 1.

Konsekvens: växande och avtagande

Tack vare medelvärdessatsen kan vi använda derivatan för att avgöra om en funktion är växande eller avtagande på ett intervall. Vi ger först precisa definitioner av dessa begrepp. Det handlar alltså om ifall $f(x)$ ökar eller minskar när x ökar.

Definition 2.17

En funktion f definierad på ett intervall I kallas

- **växande på** I om $f(x_2) \geq f(x_1)$ närhelst $x_2 > x_1$ i I,
- **strängt växande på** I om $f(x_2) > f(x_1)$ närhelst $x_2 > x_1$ i I,
- **avtagande på** I om $f(x_2) \leq f(x_1)$ närhelst $x_2 > x_1$ i I, och
- **strängt avtagande på** I om $f(x_2) < f(x_1)$ närhelst $x_2 > x_1$ i I.

Exempel 2.6.4

Funktionen $f(x) = x^2$ är strängt avtagande på $(-\infty, 0]$ och strängt växande på $[0, \infty)$.

En konstant funktion på ett intervall är både växande och avtagande på det intervallet, men varken strängt växande eller strängt avtagande.

Observera alltså att växande (eller avtagande) inte utesluter att funktionen är konstant på delar av intervallet. Av den anledningen säger man ibland **icke-avtagande** istället för växande, och **icke-växande** istället för avtagande. I svensk terminologi är detta inte så vanligt, men på engelska säger man ofta **non-increasing** och **non-decreasing**.

Anmärkning 2.6.5

Ett samlingsnamn för växande och avtagande är **monoton**: att en funktion är (strängt) monoton på ett intervall innebär alltså att den antingen är strängt växande eller strängt avtagande på det intervallet. En strängt monoton funktion kan då inte anta samma värde två gånger på intervallet, och är alltså injektiv. Detta kommer vi att formulera noggrannare i Sats 2.19.

Dessa begrepp hänger samman med derivatans tecken på följande sätt.

Sats 2.18

Antag att f är deriverbar på intervallet $I = (a, b)$.

a) Om $f'(x) \geq 0$ för alla $x \in I$ så är f växande på I.

b) Om $f'(x) > 0$ för alla $x \in I$ så är f strängt växande på I.

c) Om $f'(x) \leq 0$ för alla $x \in I$ så är f avtagande på I.

d) Om $f'(x) < 0$ för alla $x \in I$ så är f strängt avtagande på I.

e) Om $f'(x) = 0$ för alla $x \in I$ så är f konstant på I.

Bevis: Vi bevisar a); de andra delarna visas på samma sätt. För att visa a) måste vi visa att $f(x_2) \geq f(x_1)$ så länge x_1 och x_2 är punkter i I med $x_2 > x_1$. Om x_1 och x_2 är två sådana punkter så är f deriverbar på $[x_1, x_2]$ och därför kontinuerlig där, så vi kan tillämpa medelvärdessatsen. Den ger att

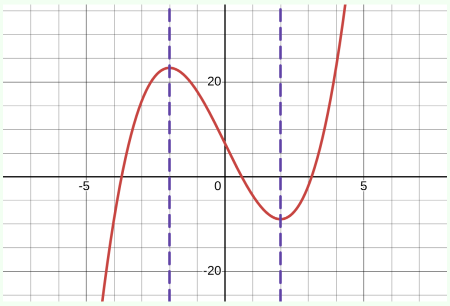
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

för något c med $x_1 < c < x_2$. Om nu $f'(x) \geq 0$ för alla I, så gäller $f'(c) \geq 0$; dessutom är nämnaren $x_2 - x_1$ positiv på grund av att $x_2 > x_1$. Därför måste $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, dvs $f(x_2) \geq f(x_1)$, vilket skulle visas.

Exempel 2.6.6

Var är funktionen $f(x) = x^3 - 12x + 7$ växande respektive avtagande?
Lösning. Vi deriverar: $f'(x) = 3x^2 - 12$. Sedan undersöker vi derivatans tecken.

Notera att $f'(x) = 3(x^2 - 4)$ och detta är noll om $x^2 = 4$ (dvs $x = \pm 2$), negativt om $x^2 < 4$ (dvs $-2 < x < 2$) och positivt annars. Satsen ovan ger därför att f är avtagande på $[-2, 2]$ och växande på $(-\infty, -2]$ och $[2, \infty)$.



Anmärkning 2.6.7

Observera att en funktion kan vara strängt växande på ett intervall utan att $f'(x) > 0$ gäller överallt (satsen säger inte "om och endast om"). Funktionen $f(x) = x^3$ är strängt växande överallt eftersom $x_2 > x_1$ medför att $x_2^3 > x_1^3$. Men $f'(x) = 3x^2$ är lika med 0 då $x = 0$. I själva verket kan en funktion ha isolerade punkter där derivatan är 0 och ändå vara strängt växande.

2.7 Implicit derivering

Hittills har vi bestämt $\dfrac{dy}{dx}$ i situationer där $y = f(x)$ är *explicit* given som en funktion av x, dvs y har "lösts ut". Ofta, inte minst i tillämpningar, är y istället implicit given av en ekvation som innehåller både x och y, t ex

$$\cos(x + y) = \sin(xy),$$

och uppgiften är att bestämma derivatan $\frac{dy}{dx}$ i någon punkt. Vi börjar med ett enklare exempel.

Exempel 2.7.1

Enhetscirkeln ges av ekvationen $x^2 + y^2 = 1$. För att bestämma tangentens lutning i en punkt (x, y) på cirkeln, deriverar vi båda led i ekvationen med avseende på x:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}1$$

vilket är ekvivalent med

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}1.$$

Vi vet redan att

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x \quad \text{och} \quad \frac{d}{dx}1 = 0.$$

Observera att y^2 är en funktion av y. Om vi betraktar y som funktion av x, är detta alltså en sammansatt funktion. Kedjeregeln ger då

$$\frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dy}y^2\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}.$$

Observera att det är $\dfrac{dy}{dx}$ som vi söker. Om vi sätter in allt detta tillbaka i ekvationen får vi

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Om $y \neq 0$ kan vi lösa ut

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{2x} = -\frac{x}{y}.$$

Denna metod, att derivera ekvationens båda led och på så sätt få fram en ekvation för $\frac{dy}{dx}$, kallas för **implicit derivering**.

Idé

Implicit derivering går ut på att man deriverar ett samband (en ekvation) med avseende på x, där man behandlar y som funktion av

x och använder kedjeregeln.

Anmärkning 2.7.2

a) Det uttryck man får för $\frac{dy}{dx}$ innehåller både x och y. Detta är något man får leva med, eftersom man i allmänhet inte kan lösa ut y som funktion av x överallt.

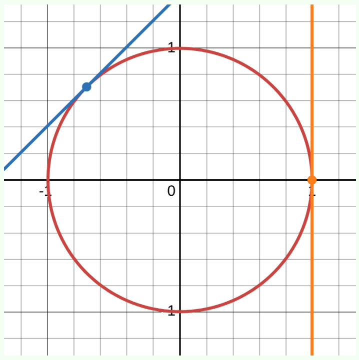
b) Implicit derivering är en metod och inte en ny teori för derivatan. Med hjälp av den kan man bestämma derivatan $\frac{dy}{dx}$ i de punkter där derivatan existerar.

c) Vi kan göra den förra anmärkningen mer matematiskt precis (i linje med Anmärkning 2.2.1): ekvationen ska definiera y som funktion av x i ett intervall runt detta x, och denna funktion ska vara deriverbar i x. Så även om y inte kan lösas ut globalt som funktion av x, så är den lokalt en funktion av x.

d) Implicit derivering kan t ex användas för att bestämma tangentens lutning till den kurva som ekvationen beskriver, i en konkret punkt (x, y). I sådana fall har man numeriska värden på x och y, och det är inget bekymmer att uttrycket för $\frac{dy}{dx}$ innehåller både x och y.

Exempel 2.7.3

Låt oss gå tillbaka till kurvan som ges av $x^2 + y^2 = 1$, dvs enhetscirkeln, i ljuset av anmärkningen ovan. Från det förra exemplet vet vi att $y' = -\frac{x}{y}$ om $y \neq 0$. Med hjälp av detta kan vi räkna ut tangentens lutning i olika punkter.



Punkten $(x, y) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ligger på cirkeln, och där är $-\frac{x}{y} = 1$, vilket är lutningen på den diagonala linjen i figuren. Så kan vi göra så länge $y \neq 0$. I punkten $(1, 0)$ fungerar inte detta, och mycket riktigt är $\frac{dy}{dx}$ inte definierad i den punkten, vilket man kan se på den lodräta tangenten.

Vad gäller b) i anmärkningen ovan noterar vi att vi kan lösa ut y som en funktion av x kring varje punkt där $y > 0$ eller $y < 0$. I punkterna $(\pm 1, 0)$ är detta inte möjligt: hur liten del av cirkeln vi än tar runt någon av dessa punkter, får vi en kurva som vänder i x-led, och därför inte kan vara grafen till en funktion $y = f(x)$.

I detta exempel kan vi lösa ut y rent praktiskt i dessa fall. Låt oss fokusera på punkter med positiv y-koordinat. Dessa ligger inne på den övre halvcirkeln där $y \geq 0$, och vi får

$$x^2 + y^2 = 1 \iff y^2 = 1 - x^2 \iff y = \sqrt{1 - x^2},$$

där den sista ekvivalensen gäller då $y \geq 0$. Om vi deriverar detta uttryck får vi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{y}$$

vilket givetvis stämmer med vad den implicita deriveringen gav.

Även om man i princip kan lösa ut y som funktion av x runt den punkt man är intresserad av, är detta inte alltid praktiskt görbart.

Exempel 2.7.4

Betrakta kurvan som ges av $\cos(x + y) = \sin(xy)$. Verifiera att punkten $(\frac{\pi}{2}, 0)$ ligger på kurvan, och använt implicit derivering för att beräkna tangentens lutning i den punkten.

Lösning. En punkt (x, y) ligger på kurvan om och endast om dess koordinater uppfyller $\cos(x + y) = \sin(xy)$. I detta fall har vi

$$\cos(\tfrac{\pi}{2} + 0) = 0 = \sin(\tfrac{\pi}{2} \cdot 0)$$

så punkten ligger på kurvan. Deriverar vi vänsterledet med avseende på x får vi, med kedjeregeln, att

$$\frac{d}{dx}\cos(x+y) = -\sin(x+y)(1+y')$$

(där vi använder y' istället för $\frac{dy}{dx}$ för att spara plats), och deriverar vi högerledet får vi, med produkt- och kedjeregeln, att

$$\frac{d}{dx}\sin(xy) = \cos(xy)(1\cdot y + x\cdot y').$$

Sammantaget gäller

$$-\sin(x+y)(1+y') = \cos(xy)(1\cdot y + x\cdot y')$$

och sätter vi in punktens koordinater får vi

$$-\sin(\tfrac{\pi}{2}+0)(1+y') = \cos(\tfrac{\pi}{2}\cdot 0)(1\cdot 0 + \tfrac{\pi}{2}\cdot y')$$

vilket förenklas till $-(1+y') = 0$. Därmed är $y' = 1$ och tangentens lutning i punkten är 1.

(Den djärva läsaren uppmanas rita upp kurvan i ett kurvritningsprogram och inse varför det inte går att lösa ut y globalt som en funktion av x.)

Vi vet sedan tidigare att $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ gäller för alla heltal n. Vi kan nu utvidga detta till exponenter som inte är heltal.

Exempel 2.7.5

Låt $y = x^{\frac{m}{n}}$ med m och n heltal och $x > 0$. Då är $y = x^{\frac{m}{n}}$ ekvivalent med $y^n = x^m$. Vi vill bestämma y' och använder implicit derivering på $y^n = x^m$. Detta ger

$$ny^{n-1}y' = mx^{m-1}$$

så att

$$y' = \frac{mx^{m-1}}{ny^{n-1}}.$$

Men $y = x^{\frac{m}{n}}$, så potenslagar ger att detta är lika med

$$y' = \frac{mx^{m-1}}{nx^{\frac{m(n-1)}{n}}}$$

vilket kan förenklas till $\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$. Man kan vidare visa att samma sak gäller för negativa x ifall n är udda. (Om n är jämnt är $x^{\frac{m}{n}}$ inte ett väldefinierat reellt tal då $x < 0$.) Alltså gäller formeln

$$\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}$$

även i detta fall. Om man begränsar sig till $x > 0$ kan man definiera x^r för varje reell exponent r, och visa att

$$\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}$$

även gäller i detta fall. (Beviset bygger på att varje reellt tal kan approximeras godtyckligt väl med rationella tal, och är utanför denna kurs omfattning.)

2.8 Inversa funktioners derivator

Inför det här avsnittet är det bra att ha läst avsnittet om inversa funktioner i slutet av Avsnitt 0.2. Kom ihåg, från detta avsnitt, att inversen till en funktion f är den funktion f^{-1} som definieras av

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y,$$

dvs den löser ut x ur sambandet $f(x) = y$. För att en funktion ska vara **inverterbar**, dvs ha en invers, krävs att den är injektiv (dvs ett-till-ett), vilket innebär att $f(x_1) \neq f(x_2)$ om $x_1 \neq x_2$, eller med andra ord att olika variabelvärden ger olika funktionsvärden.

Sats 2.19

Om f är strängt växande eller strängt avtagande på hela sin definitionsmängd, så är f inverterbar.

Bevis: Antag att f är strängt växande. Om $x_1 \neq x_2$ så är antingen $x_2 > x_1$ eller $x_1 > x_2$. Ifall $x_2 > x_1$ så är $f(x_2) > f(x_1)$, och om $x_1 > x_2$ så är $x_1 > x_2$ så är $f(x_1) > f(x_2)$, per definition av strängt växande. I båda fallen är alltså $f(x_1) \neq f(x_2)$, vilket skulle visas. Beviset ifall f är strängt avtagande är likadant.

Tack vare sats 2.18 kan vi alltså använda derivatan för att avgöra om en funktion är inverterbar. En naturlig fråga är då vad derivatan av inversen är. Detta kan vi beräkna med implicit derivering. Från sats 0.12 vet vi att

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

Deriverar vi båda led med avseende på x, och använder kedjeregeln i vänsterledet, får vi

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1,$$

vilket är ekvivalent med

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

förutsatt att nämnaren inte är noll. Därmed har vi uttryckt derivatan av f^{-1} i punkten x i termer av derivatan av f i punkten $f^{-1}(x)$. (Nämnaren är alltså $f'(c)$ där $c = f^{-1}(x)$.) Vi har alltså bevisat följande.

Sats 2.20

Om f är inverterbar, och x är sådan att f är deriverbar i $f^{-1}(x)$ med $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, så är f^{-1} deriverbar i x, och

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Exempel 2.8.1

Om $f(x) = x^3$ så är $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$. Vi vet redan att derivatan av $x^{\frac{1}{3}}$ är $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ om $x \neq 0$, så låt oss kontrollera satsen ovan i detta fall. Vi har $f'(x) = 3x^2$, så

$$f'(f^{-1}(x)) = 3\left(x^{1/3}\right)^2 = 3x^{2/3}.$$

Om $x \neq 0$ är detta nollskilt och

$$\frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{3x^{2/3}} = \tfrac{1}{3}x^{-2/3}$$

som väntat.

Exempel 2.8.2

Visa att $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som ges av $f(x) = x^3 + x$ är inverterbar på hela $\mathbb{R}$, och beräkna $(f^{-1})'(2)$.

Lösning. Vi beräknar $f'(x) = 3x^2 + 1$ och noterar att detta är positivt för alla $x \in \mathbb{R}$. Därför är f strängt växande och därmed inverterbar på hela $\mathbb{R}$.

För att beräkna derivatan i $x = 2$ använder vi satsen ovan:

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))}.$$

Vi behöver inte ha någon formel för $f^{-1}(x)$ i allmänhet, utan bara veta vad $f^{-1}(2)$ är, dvs vilket tal c som uppfyller $f(c) = 2$. Vi ser i detta fall att 1 uppfyller $f(1) = 1^3 + 1 = 2$, så

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3 \cdot 1^2 + 1} = \frac{1}{4}.$$

Inversa trigonometriska funktioner

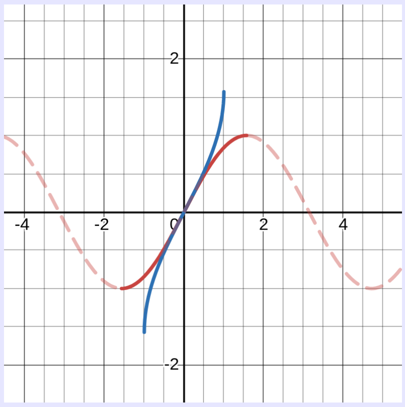
Vi vill nu beräkna inversen till de trigonometriska funktionerna sin, cos och tan. Dessa är inte injektiva på hela sin definitionsmängd, och därför begränsar vi definitionsmängden som i Anmärkning 0.2.20.

Arcsinus

Vi börjar med sinusfunktionen, vars definitionsmängd vi begränsar till intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. På detta intervall är sin strängt växande och därför inverterbar. Vi betecknar dess invers som $\sin^{-1}$ eller (mer traditionellt) som arcsin.

Anmärkning 2.8.3

Notera att den begränsade sinusfunktionen har definitionsmängd $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ och värdemängd $[-1, 1]$. Därför har arcsin definitionsmängd $[-1, 1]$ och värdemängd $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. I figuren ovan syns $y = \sin x$ i rött, där den heldragna kurvan är den begränsade sinuskurvan, och $y = \arcsin x$ i blått. Observera hur de två heldragna kurvorna är varandras spegelbilder i linjen $y = x$.



Exempel 2.8.4

a) $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ eftersom $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

b) $\arcsin 2$ är inte definierat då inget x uppfyller $\sin x = 2$.

c) $\sin(\arcsin(\frac{\pi}{5})) = \frac{\pi}{5}$ på grund av att funktionerna är varandras inverser på intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, där $\frac{\pi}{5}$ ingår.

d) $\arcsin(\sin(\frac{9\pi}{4}))$ är inte lika med $\frac{9\pi}{4}$, eftersom detta är utanför $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Däremot är $\arcsin(\sin(\frac{9\pi}{4})) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$. Sådana konstigheter är priset man betalar för att ha begränsat definitionsmängden.

Vi är nu intresserade av att derivera arcsin, dvs bestämma y' där $y = \arcsin x$. Vi använder implicit derivering och det faktum att

$$y = \arcsin x \iff x = \sin y$$

gäller för $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Deriverar vi båda sidor av $x = \sin y$ med avseende på x, får vi

$$1 = \cos(y)y'.$$

Om $\cos y \neq 0$ får vi alltså

$$y' = \frac{1}{\cos(y)}.$$

Vi vill dock uttrycka detta som funktion av x. Vi vet redan att $\sin y = x$, så vi använder den trigonometriska ettan för att skriva om $\cos y$: från

$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ får vi $\cos y = \pm\sqrt{1-\sin^2 y}$. Då $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ är $\cos y \geq 0$, så $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$. Detta är nollskilt om $x \neq \pm 1$. Sammanfattningsvis gäller alltså följande.

Sats 2.21

Funktionen $f(x) = \arcsin x$ är deriverbar på intervallet $(-1, 1)$, och

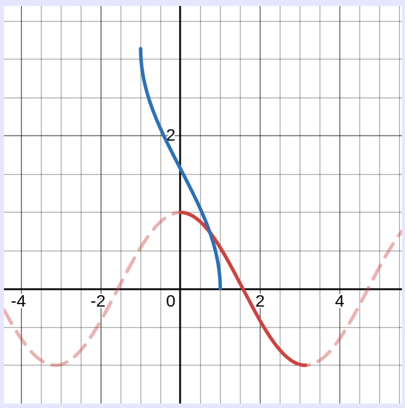
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Arccosinus

Vi fortsätter med cosinusfunktionen, som vi begränsar till intervallet $[0, \pi]$, där den är strängt avtagande och därför inverterbar. Vi betecknar dess invers med $\cos^{-1}$ eller arccos.

Anmärkning 2.8.5

Den begränsade cosinusfunktionen har alltså definitionsmängd $[0, \pi]$ och värdemängd $[-1, 1]$. Därför har arccos definitionsmängd $[-1, 1]$ och värdemängd $[0, \pi]$. I figuren ovan syns $y = \cos x$ i rött, där den heldragna kurvan är den begränsade cosinuskurvan, och $y = \arccos x$ i blått. Observera återigen hur de två heldragna kurvorna är varandras spegelbilder i linjen $y = x$.



För att derivera arccos, dvs bestämma y' där $y = \arccos x$, gör vi på samma sätt som för arcsin: vi använder implicit derivering och det faktum att

$$y = \arccos x \iff x = \cos y$$

gäller för $y \in [0, \pi]$. Deriverar vi båda sidor av $x = \cos y$ med avseende på x, får vi

$$1 = -\sin(y)y'.$$

Med hjälp av den trigonometriska ettan och det faktum att $\cos y = x$ får vi, på samma sätt som för arcsin, följande.

Sats 2.22

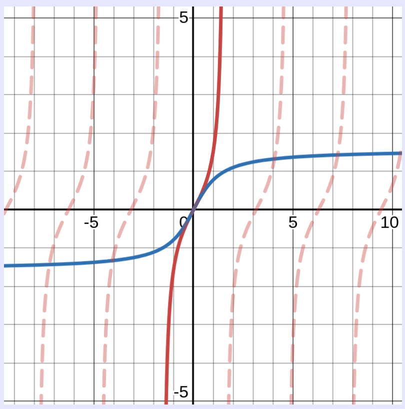
Funktionen $f(x) = \arccos x$ är deriverbar på intervallet $(-1, 1)$, och

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Arctangens

Vi avslutar med tangensfunktionen, som är lite annorlunda och vars invers kommer att vara mycket användbar framöver. Vi begränsar definitionsmängden till intervallet $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (utan ändpunkter), där tan är strängt växande och därför inverterbar. Vi betecknar dess invers med $\tan^{-1}$ eller arctan.

Anmärkning 2.8.6



Den begränsade tangensfunktionen har alltså definitionsmängd $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ och värdemängd hela $\mathbb{R}$. Därför har arctan definitionsmängd $\mathbb{R}$ och värdemängd $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Notera att de vertikala asymptoterna $x = \pm\frac{\pi}{2}$ för $y = \tan x$ svarar mot horisontella asymptoter $x = \pm\frac{\pi}{2}$ för $y = \arctan x$. I figuren ovan syns $y = \tan x$ i rött, där den heldragna kurvan är den begränsade tangenskurvan, och $y = \arctan x$ i blått. Observera återigen hur de två heldragna kurvorna är varandras spegelbilder i linjen $y = x$.

För att derivera arctan, dvs bestämma y' där $y = \arctan x$, gör vi på samma sätt som ovan: implicit derivering och det faktum att

$$y = \arctan x \iff x = \tan y$$

för $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ger

$$1 = \frac{1}{\cos^2 y} y' = (1 + \tan^2 y) y',$$

där vi använt omskrivningen $\frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y$ från förr. Alltså gäller

$$y' = \frac{1}{1 + \tan^2 y}$$

överallt, eftersom nämnaren aldrig är 0. Eftersom $\tan y = x$ har vi visat följande.

Sats 2.23

Funktionen $f(x) = \arctan x$ är deriverbar på hela $\mathbb{R}$, och

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

2.9 Exponentialfunktioner och logaritmer

En *exponentialfunktion* är en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som ges av $f(x) = a^x$, där $a > 0$ är en (konstant) bas. Detta ska inte förväxlas med funktionen $f(x) = x^a$. En exponentialfunktion får sitt namn av att variabeln sitter i exponenten.

Anmärkning 2.9.1

Det är inte självklart vad a^x betyder, eller att det ens är definierat, för alla $x \in \mathbb{R}$. Om $x = m$ är ett positivt heltal är a^x en produkt $a \cdot a \cdots a$ med m faktorer. Detta kan utvidgas till allmänna $x \in \mathbb{R}$ stegvis: negativa heltalsexponenter definieras genom $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$, och $x^0 = 1$. Om $x = \frac{m}{n}$ är ett rationellt tal (med $n \neq 0$) definieras a^x som

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},$$

vilket är definierat eftersom $a > 0$. Man utvidgar detta till allmänna reella exponenter genom att utnyttja att varje reellt tal kan approximeras godtyckligt väl med rationella tal (Sats 0.2). Vi går inte närmare in på detta.

Exponentialfunktioner har följande egenskaper.

Sats 2.24: Potenslagar

För alla $a > 0$ och $x, y \in \mathbb{R}$ gäller att a^x och a^y är positiva tal, och

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad a^x/a^y = a^{x-y}, \quad \text{och} \quad (a^x)^y = a^{xy}.$$

Om $a = 1$ gäller $a^x = 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$, dvs är en konstant funktion. För alla andra $a > 0$ är a^x strängt monoton: det följer från potenslagarna att a^x strängt växande om $a > 0$ och strängt avtagande om $0 < a < 1$. Detta visar en del av följande sats.

Sats 2.25

Om $a \neq 1$ är funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som ges av $f(x) = a^x$ injektiv med värdemängd $(0, \infty)$.

Detta innebär att funktionen är inverterbar. Inversen kallas för **a-logaritmen** och betecknas $\log_a$. Den definieras alltså av sambandet

$$y = \log_a x \Longleftrightarrow x = a^y.$$

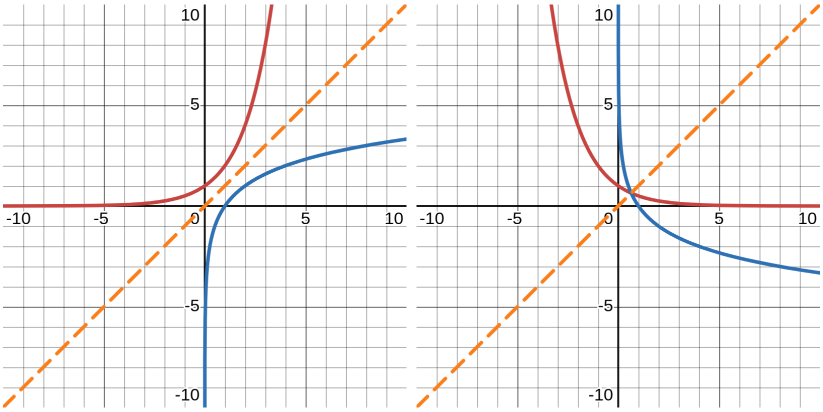
Exempel 2.9.2

a) $\log_2 32 = 5$ eftersom $2^5 = 32$.

b) $\log_{10} 0.001 = -3$ eftersom $10^{-3} = 0.001$.

c) $\log_9 3 = \frac{1}{2}$ och $\log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$.

Observera att $\log_a$ har definitionsmängd $(0, \infty)$ och värdemängd $\mathbb{R}$, enligt egenskaperna hos inversa funktioner. Vi ritar nedan graferna till $y = a^x$ i rött och $y = \log_a x$ i blått i samma koordinatsystem i två fall: $a = 2$ till vänster och $a = \frac{1}{2}$ till höger. Deras utseenden är typiska för fallen då $a > 1$ respektive $a < 1$. Observera speglingsbeteendet kring den streckade linjen $y = x$ i båda fallen.



Från potenslagarna kan man härleda följande.

Sats 2.26: Logaritmlagar

För alla $a > 0$ och $x, y \in \mathbb{R}$ gäller

$$\begin{aligned}
&\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,\\
&\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y, \quad \text{och}\\
&\log_a(x^y) = y \log_a x.
\end{aligned}$$

Derivatan av en exponentialfunktion

Vi vill nu om möjligt derivera funktionen $f(x) = a^x$ där $a > 0$. Derivatans definition och potenslagarna ger

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h}\\
&= a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h},
\end{aligned}$$

där vi kunde lyfta a^x ut ur gränsvärdet då det inte beror av h. Om gränsvärdet $\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$ existerar och är lika med något tal L, så får vi alltså $f'(x) = La^x$. Man kan vända på frågeställningen: kan vi välja a så att $L = 1$, vilket alltså skulle ge $f'(x) = a^x$, dvs att exponentialfunktionen är sin egen derivata? Svaret är ja, och detta är en av definitionerna av Eulers konstant e.

Sats 2.27

Det finns precis ett reellt tal $a > 0$ som uppfyller $\frac{d}{dx}a^x = a^x$. Detta tal kallas för **Eulers tal** och betecknas e.

Avrundat till tre decimaler är $e \approx 2.718$.

Anmärkning 2.9.3

Definitionen ovan är en av de möjliga sätten att definiera e, och är alltså ekvivalent med att $\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$. En mer klassisk definition är

$$e = \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N .$$

(Här är N ett heltal och inte ett allmänt reellt tal, så gränsvärdet är gränsvärdet av en talföljd. Vi kommer att behandla dessa i Kapitel 3.) Man kan visa att dessa två definitioner är ekvivalenta. Istället för att göra det ger vi en intuitiv förklaring till varför de säger samma sak: att $\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$ innebär att för små h så är

$$\frac{a^h - 1}{h} \approx 1$$

och från detta kan vi lösa ut a approximativt som

$$a \approx (1 + h)^{\frac{1}{h}},$$

om h är litet, t ex om $h = \frac{1}{N}$ där N är ett stort positivt heltal. Sätter vi in detta får vi

$$a \approx \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N$$

då N är stort, vilket är innebörden av att

$$a = \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N .$$

Detta kan göras till ett precist argument genom att resonera med hjälp av gränsvärden.

Slutsatsen är alltså följande.

Sats 2.28

Funktionen $f(x) = e^x$ är deriverbar överallt på $\mathbb{R}$, och uppfyller $f'(x) = f(x)$.

Exempel 2.9.4

Beräkna

a) $\dfrac{d}{dx}x^3e^x$, och

b) $\dfrac{d}{dt}e^{t^2+7t}$.

Lösning.

a) Produktregeln ger

$$\frac{d}{dx}(x^3e^x) = 3x^2e^x + x^3e^x = (3x^2 + x^3)e^x.$$

b) Kedjeregeln ger

$$\frac{d}{dt}e^{t^2+7t} = e^{t^2+7t}\frac{d}{dt}(t^2 + 7t) = (2t + 7)e^{t^2+7t}.$$

Den naturliga logaritmen

Att $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ har förtjänat e benämningen **den naturliga basen**. Logaritmen $\log_e$ kallas därför **den naturliga logaritmen**, på franska *le logarithme naturel*, förkortat ln. Man skriver därför ln istället för $\log_e$.

Sats 2.29

Funktionen ln är deriverbar på hela sin definitionsmängd $(0, \infty)$, och $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$.

Bevis: Notera att $\ln x$ är inversen $f^{-1}(x)$ till exponentialfunktionen $f(x) = e^x$, och enligt Sats 2.20 är

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(\ln x)} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

där den nästsista likheten gäller på grund av att f är sin egen derivata, och den sista likheten på grund av att $f(f^{-1}(x)) = x$.

Logaritmlagarna och det faktum att ln har en så enkel derivata gör den naturliga logaritmen till ett användbart verktyg för att derivera komplicerade funktioner. Vi visar detta i följande exempel. Metoden har fått namnet *logaritmisk derivering*.

Exempel 2.9.5

Beräkna $\frac{dy}{dx}$ där
a) $y = a^x$ där $a > 0$, och b) $y = x^x$.

Lösning. För att derivera $y = f(x)$ använder vi att $f(x) = e^{\ln f(x)}$ och utnyttjar logaritmlagarna.

a) Här har vi $y = e^{\ln(a^x)} = e^{x \ln a}$ som vi deriverar med kedjeregeln och får

$$\frac{dy}{dx} = e^{x \ln a} = e^{x \ln a} \frac{d}{dx}(x \ln a) = e^{x \ln a} \ln a$$

och sedan förenklar vi tillbaka $e^{x \ln a} = e^{\ln(a^x)} = a^x$. Sammantaget är alltså $\frac{dy}{dx} = a^x \ln a$.

b) Här har vi på liknande sätt $y = e^{\ln(x^x)} = e^{x \ln x}$ som vi deriverar med kedjeregeln (och produktregeln) och får

$$\frac{dy}{dx} = e^{x \ln a} = e^{x \ln a} \frac{d}{dx}(x \ln x) = e^{x \ln x}(1 \cdot \ln x + x \cdot \tfrac{1}{x}).$$

Förenkling ger att detta är $e^{\ln(x^x)}(\ln x + 1) = x^x(1 + \ln x)$.

Asymptotiskt beteende

Exponentialfunktioner a^x, potensfunktioner x^a och logaritmer $\log_a x$ används ofta för att beskriva olika slags tillväxt: en bakteriekulturs storlek över tid, smittspridningen i en epidemi, osv. Man talar om sådant som exponentiell tillväxt, polynomiell tillväxt (polynom är ju summor av potensfunktioner) respektive logaritmisk tillväxt. Därför är det intressant att veta hur dessa funktioner beter sig i olika intressanta gränsvärden. Tack vare omskrivningar räcker det att betrakta e^x och $\ln x$ istället för allmänna a^x och $\log_a x$, vilket förenklar situationen något. Övertyga dig först om följande, där $a > 0$.

$$\begin{array}{lll}
\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty & \lim\limits_{x\to\infty} x^a = \infty & \lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty \\
\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 & \lim\limits_{x\to-\infty} x^a = -\infty & \lim\limits_{x\to-\infty} |x|^a = \infty \\
\lim\limits_{x\to 0} e^x = e^0 = 1 & \lim\limits_{x\to 0} x^a = 0 & \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty
\end{array}$$

Frågan är hur dessa funktioner beter sig i förhållande till varandra. Närmare bestämt gäller följande.

Sats 2.30

Låt $a > 0$ vara en konstant.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$, b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$, c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} |x|^a e^x = 0$, e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^a \ln x = 0$.

Innan vi går in på beviset, tolkar vi vad som sker i de olika gränsvärdena. I a)-c) går både täljaren och nämnaren mot ∞. Att gränsvärdet då blir 0 kan tolkas som att nämnaren går mot ∞ snabbare än täljaren och "vinner" över täljaren. I d) gäller $|x|^a \to \infty$ medan $e^x \to 0$, så resultatet tyder på att e^x "vinner", medan i e) gäller $x^a \to 0$ och $\ln x \to -\infty$, så här "vinner" x^a. Detta kan sammanfattas på följande sätt.

Idé

Exponentialfunktioner vinner över potenser. Potenser vinner över logaritmer.

Vi bevisar nu första delen av satsen för att ge en idé om hur sådana satser kan bevisas.

Bevis av Sats 2.30.a) Beviset bygger på följande olikheter, som gäller då $x > 1$:

$$0 < \ln x < \frac{2}{a} x^{a/2}.$$

Antag att de gäller. Vi dividerar alla led med x^a och får

$$0 < \frac{\ln x}{x^a} < \frac{2}{a x^{a/2}},$$

där förenklat högerledet. När $x \to \infty$ kommer nu högerledet att gå mot 0, eftersom $x^{a/2} \to \infty$ i nämnaren. Vänsterledet 0 kommer förstås också att gå mot 0. Enligt klämsatsen måste det mellersta ledet också gå mot 0, dvs

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0,$$

vilket skulle visas.

Låt oss nu visa olikheterna i början. Att $\ln x > 0$ då $x > 1$ gäller då $\ln 1 = 0$ och $\ln x$ är strikt växande. För att visa olikheten $\ln x < \frac{2}{a} x^{a/2}$ använder vi ett liknande resonemang, efter att vi flyttat allt till en sida. Vi måste nu visa att

$$\frac{2}{a} x^{a/2} - \ln x > 0$$

för alla $x > 1$. När $x = 1$ är

$$\frac{2}{a} x^{a/2} - \ln x = \frac{2}{a} - 0 > 0,$$

och när $x \geq 1$ är derivatan av vänsterledet lika med

$$x^{a/2-1} - \frac{1}{x} = \frac{x^{a/2}}{x} - \frac{1}{x} = \frac{x^{a/2} - 1}{x},$$

vilket är positivt då $x > 1$. Vi har alltså visat att vänsterledet är positivt då $x = 1$ och därefter växande, vilket innebär att det alltid är positivt då $x > 1$.

$f(x)$	$\frac{df}{dx}$		$f(x)$	$\frac{df}{dx}$
konstant	0		$\sin x$	$\cos x$
$x^r \ (r \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$	rx^{r-1}		$\cos x$	$-\sin x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$		$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\lvert x\rvert$	$\text{sgn}x$		$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$		$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Tabell 1: Några standardderivator

Vi har nu lärt oss ett antal derivator av grundläggande funktioner. Dessa "standardderivator", som vi har i Tabell 1 ovan, bör man lära sig. Uttrycken i tabellen gäller överallt där funktionen är deriverbar.

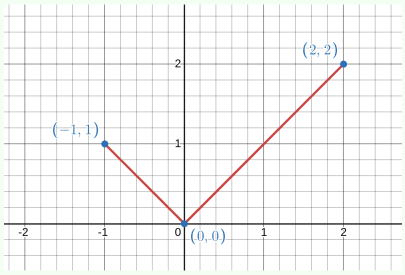
2.10 Lokala och globala extrempunkter

Vi påbörjar nu en närmare studie av funktioner, där vi använder informationen från funktionen och dess derivator för att förstå hur funktionen beter sig. Vi börjar med att använda derivatan för att hitta lokala maxima och minima (dessa mötte vi först i Definition 1.18; de kallas med ett gemensamt namn för **lokala extrempunkter**). Givet en funktion f definierad på ett intervall I, undrar vi: var kan funktionen ha lokala maxima och minima?

Från Sats 2.15 vet vi att om x_0 är en lokal extrempunkt där f är deriverbar, så måste $f'(x_0) = 0$. Satsen förutsätter att f är definierad på ett intervall (a, b) där x_0 ingår, dvs att f är definierad på båda sidor om x_0. Men extrempunkter kan finnas där f inte är deriverbar, eller där f bara är definierad på ena sidan om punkten, som i följande exempel.

Exempel 2.10.1

Betrakta $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ som ges av $f(x) = |x|$. På intervallet $[-1, 2]$ har funktionen ett lokalt minimum i $x = 0$ (där f inte är deriverbar), och lokala maxima i ändpunkterna $x = -1$ och $x = 2$. (Förresten har f absolut minimum i $x = 0$ och absolut maximum i $x = 2$.)



Vi ger namn åt dessa typer av punkter.

Definition 2.31

Låt f vara en funktion och x_0 en punkt i definitionsmängden till f. Punkten x_0 kallas för

- en **kritisk punkt till** f om $f'(x_0) = 0$, och
- en **singulär punkt till** f om $f'(x_0)$ inte existerar.

Detta visar sig täcka alla möjligheter, enligt nästa sats.

Sats 2.32

Om x_0 är en lokal maxpunkt eller minpunkt till f, så är x_0 antingen en kritisk punkt, en singulär punkt, eller en ändpunkt till något intervall i definitionsmängden.

Bevis: Om x_0 är en lokal extrempunkt som inte är en ändpunkt eller en singulär punkt, så är f definierad på båda sidor om x_0, och deriverbar i x_0. Men då säger Sats 2.15 att x_0 är en kritisk punkt. Därmed är varje lokal extrempunkt en ändpunkt, singulär punkt, eller kritisk punkt.

Observera att satsen inte säger att varje ändpunkt, singulär punkt eller kritisk punkt nödvändigtvis är en lokal extrempunkt. Implikationen går bara åt ena hållet, som nästa exempel visar.

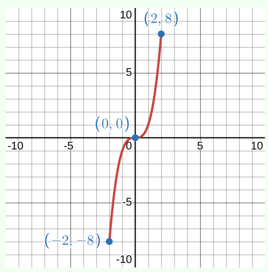
Exempel 2.10.2

Antag att vi vill bestämma lokala extrempunkter till $f(x) = x^3$ på intervallet $[-2, 2]$. Funktionen är deriverbar överallt och $f'(x) = 3x^2$ som är noll precis då $x = 0$. Därmed har vi:

- en kritisk punkt i $x = 0$.
- inga singulära punkter, och
- de två ändpunkterna $x = \pm 2$.

För att avgöra vilka som är extrempunkter, och vad för slags extrempunkter de är (max eller min) gör vi ett teckenstudium av derivatan:

x	-2		0		2
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	min	$\nearrow$	terrass	$\nearrow$	max



(Här symboliserar $\nearrow$ att funktionen är växande och $\searrow$ att den är avtagande.)

Från derivatans tecken vet vi om funktionen är strängt växande eller strängt avtagande mellan de olika punkterna, vilket pilarna indikerar. Så kan vi dra slutsatsen att funktionen har ett minimum i $x = -2$ och ett maximum i $x = 2$, men ingen extrempunkt i $x = 0$, eftersom funktionen inte "vänder" (dvs går från växande till avtagande eller omvänt) där. En sådan punkt kallas för en **terrasspunkt**.

Denna metod fungerar för att bestämma lokala extrempunkter. Kom ihåg att Sats 1.17 säger att kontinuerliga funktioner på slutna, begränsade intervall alltid har globala max- och minpunkter. Sådana *globala extrempunkter* kan man hitta genom att bestämma de lokala extrempunkterna först, och sedan välja de punkter där funktionsvärdet är som störst respektive minst.

Exempel 2.10.3

Bestäm alla lokala och globala extrempunkter till $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ på intervallet $[-2, 3]$.

Lösning. Vi tar först reda på lokala extrempunkter. Intervallet har två ändpunkter, -2 och 3. Funktionen är ett polynom och är därför deriverbar överallt, med derivata

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x+1)(x-1)$$

och tack vare faktoriseringen ser vi att den har nollställena 0, 1 och -1.

Eftersom det saknas singulära punkter vet vi att om x_0 är en extrempunkt så gäller $x_0 \in \{-2, -1, 0, 1, 3\}$. Vi gör ett teckenstudium:

x	-2		-1		0		1		2
$4x$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$x-1$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max

Notera hur faktoriseringen av derivatan gjorde att vi kunde multiplicera ihop derivatans tecken från faktorernas tecken. Vi räknar ut funktionsvärdena i våra nyfunna lokala extrempunkter.

$$f(-2) = 5, \quad f(-1) = -4, \quad f(0) = -3, \quad f(1) = -4 \quad \text{och} \quad f(3) = 60.$$

Svar. Funktionen har lokala maxima i -3, 0 och 2, och lokala minima i -1 och 1. Funktionsvärdena i dessa punkter är listade ovan. Globalt maximum är 60 och antas i $x = 3$, medan globalt minimum är -4 och antas i $x = -1$ och $x = 1$.

Notera att denna information räcker för att rita en grov skiss av funktionens graf. (Prova gärna detta!) I nästa avsnitt ska vi ta in information från andraderivatan för att förfina sådana skisser. Innan dess tar vi ett exempel på en funktion vars definitionsmängd inte är sluten och begränsad.

Exempel 2.10.4

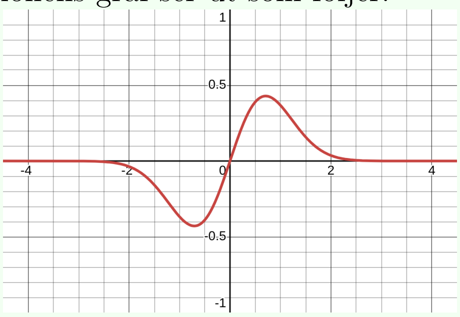
Antag att vi vill bestämma globala max- och minpunkter till funktionen $f(x) = xe^{-x^2}$ på hela $\mathbb{R}$. Nu finns det inga ändpunkter, och f är deriverbar överallt. Kontrollera att $f'(x) = (1-2x^2)e^{-x^2}$ med nollställen i $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Funktionsvärdena i dessa punkter är

$$f(\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} \quad \text{och} \quad f(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}},$$

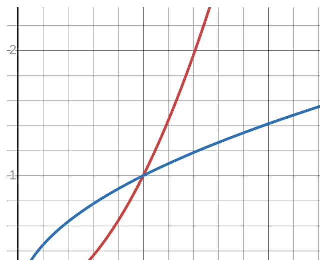
men är dessa verkligen globala extrempunkter? Eftersom intervallet inte är slutet och begränsat skulle funktionen kunna sakna globala extrempunkter, om den växer över $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$ eller avtar under $-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$ när $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$. Vi kollar därför dessa gränsvärden. När $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$ går $-x^2 \to -\infty$, så vi kan resonera utifrån Sats 2.30 att

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

Därmed vet vi att de två punkter vi fann är globalt maximum och minimum. Funktionens graf ser ut som följer.



2.11 Konkavitet och inflexion



I figuren till höger syns graferna till funktionerna $f(x) = x^2$ och $g(x) = \sqrt{x}$ för $x > 0$. Båda funktionerna är positiva och båda är växande, men de ser ändå olika ut. Funktionen $f(x) = x^2$ växer snabbare och snabbare: dess derivata $f'(x) = 2x$ är i sig växande. Å andra sidan växer $g(x) = \sqrt{x}$ långsammare och långsammare på grund av att dess derivata $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ är avtagande. Geometriskt leder detta till att den första grafen "kröker uppåt" och den andra nedåt. Sedda nerifrån ser $y = x^2$ ut som en konvex lins, och $y = \sqrt{x}$ som en konkav lins. Man lånar därför dessa ord från optiken till följande definition.

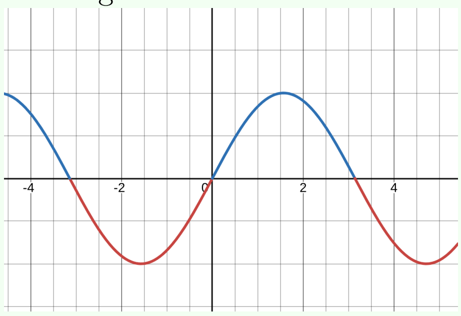
Definition 2.33

En funktion kallas **konvex** på ett intervall om den är deriverbar där och derivatan är växande på intervallet. En funktion kallas **konkav** på ett intervall om den är deriverbar där och derivatan är avtagande på intervallet.

På engelska säger man concave up istället för konvex, och concave down istället för konkav. Gemensamt talar man om funktionens **konkavitet** när man talar om huruvida den är konvex eller konkav. På svenska kan man komma ihåg definitionen genom att kon**vex**a funktioner har **väx**ande derivata, och konk**av**a funktioner har **av**tagande derivata.[2]

Exempel 2.11.1

Funktionen $f(x) = \sin x$ är konvex där $\sin x \leq 0$ och konkav där $\sin x \geq 0$. Det är nämligen på dessa intervall som derivatan $\cos x$ är växande respektive avtagande.

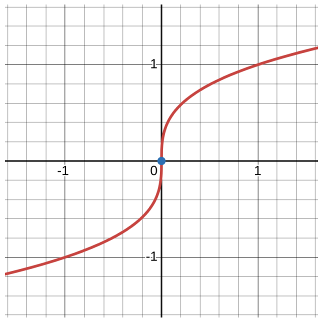


Från detta exempel inser vi två saker. Det ena är att en funktion kan byta konkavitet i vissa punkter. Det andra är att vi behöver en behändigare metod att avgöra var en funktion är konvex eller konkav. Vi börjar med den första.

Definition 2.34

Man säger att funktionen f har en **inflexionspunkt** i x_0 om kurvan $y = f(x)$ har en tangent där, är konvex på ena sidan om x_0 och konkav på andra sidan.

[2]Denna minnesregel, liksom det mesta i denna kurs, har jag lärt mig av min eminente analyslärare Gunnar Berg.



Att vi kräver att kurvan har en tangent, snarare än att f ska vara deriverbar, är för att tillåta att tangenten är vertikal. T ex har $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ i figuren till höger en inflexionspunkt i 0. Observera att en funktion kan byta konkavitet utan att ha en inflexionspunkt. Funktionen $g(x) = \frac{1}{x}$ är konvex på $(0, \infty)$ och konkav på $(-\infty, 0)$ (vilket man kan komma fram till med hjälp av nästa sats), men eftersom den inte är definierad i $x = 0$ kan den givetvis inte ha en inflexionspunkt där.

Andraderivatan hänger samman med konkavitet på följande sätt.

Sats 2.35

a) Om $f''(x) \geq 0$ på ett intervall, så är f konvex på intervallet.

b) Om $f''(x) \leq 0$ på ett intervall, så är f konkav på intervallet.

c) Om c är en inflexionspunkt och $f''(c)$ är definierad, så är $f''(c) = 0$.

Bevis: Notera att f'' är derivatan av f'.

Om $f''(x) \geq 0$ på ett intervall följer det därför från Sats 2.18 att f' är växande på intervallet, vilket är definitionen av att f är konvex där. Detta visar a), och b) visas på samma sätt.

Beviset för c) är lite mer intrikat. Antag att c är en inflexionspunkt. Detta innebär att f övergår från konvex till konkav, eller tvärtom, i den punkten. Per definition betyder det att f' övergår från växande till avtagande, eller tvärtom, i den punkten, dvs att c är en lokal max- eller minpunkt för f'. Eftersom f'' är derivatan av f' ger Sats 2.15 att $f''(c) = 0$.

Observera vilket håll implikationerna går åt. Del c) säger t ex inte att varje punkt där $f''(c) = 0$ är en inflexionspunkt. Exempelvis uppfyller $f(x) = x^4$ att $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ för alla x, så f är konvex överallt (och har alltså inga inflexionspunkter), trots att $f''(0) = 0$. Detta påminner om diskussionen om terrasspunkter, och det är ingen slump: derivatan $f'(x) = 4x^3$ har en terrasspunkt i origo.

Exempel 2.11.2

Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ges av $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$. Avgör var funktionen är växande och avtagande och bestäm alla lokala extrempunkter. Avgör även var funktionen är konvex och konkav och bestäm alla inflexionspunkter.

Lösning. Både f' och f'' är deriverbara överallt och intervallet har inga ändpunkter. Vi undersöker alltså var f' och f'' är positiva, negativa eller 0.

Vi bestämmer derivatan $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3)$, vars nollställen är 0 och $\frac{3}{2}$. Sedan bestämmer vi andraderivatan $f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1)$, vars nollställen är 0 och 1. Sedan gör vi ett teckenstudium.

x		0		1		$\frac{3}{2}$	
$f'(x)$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	terrass	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	min	$\nearrow$
$f(x)$	$\smile$	inflexion	$\frown$	inflexion	$\smile$	$\smile$	$\smile$

(Här symboliserar alltså $\smile$ att funktionen är konvex och $\frown$ att den är konkav.)

Slutsats Funktionen är avtagande på $(-\infty, \frac{3}{2}]$ och växande på $[\frac{3}{2}, \infty)$, med en minimipunkt i $x = \frac{3}{2}$. Den är konvex på $(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ och konkav på $[0, 1]$, med inflexionspunkter i $x = 0$ och $x = 1$.

2.12 Hur påverkar funktionens olika delar grafens utseende?

Som avsnitten ovan visar, ger derivatan f' och andraderivatan f'' mycket information om hur funktionen f beter sig och hur grafen till f, dvs $y = f(x)$ ser ut. Mycket information kan man också få ut från f själv, t ex med hjälp av lämpliga gränsvärden. Målet med detta avsnitt är att systematiskt ta reda på denna information och använda den för att skissa grafen $y = f(x)$ så noga som möjligt. Även om det idag finns bra verktyg för att skissa grafer, är detta en viktig kunskap som bidrar till en god matematisk intuition. Framförallt lär man sig avgöra vilka egenskaper och parametrar hos funktionen som styr vilka beteenden, vilket är avgörande i tillämpningar där sådana parametrar kan varieras.

Vi sammanfattar vilken information vi kan få ut om funktionen. de flesta av begreppen nedan har vi redan stött på.

Idé

Antag att vi vill skissa grafen $y = f(x)$.

- Från $f(x)$ får vi information om definitionsmängd, skärningar med koordinataxlarna, symmetrier och asymptoter.
- Från $f'(x)$ får vi information om kritiska punkter, singulära punkter, var f är växande/avtagande, samt eventuella extrempunkter.
- Från $f''(x)$ får vi information om konkavitet och inflexionspunkter.

Låt oss gå igenom dessa punkter.

Definitionsmängd och skärning med koordinataxlarna Detta handlar om var funktionen är definierad och var den skär y-axeln (dvs $f(0)$) och x-axeln (dvs var $f(x) = 0$).

Symmetri Om funktionen är symmetrisk på något sätt, förenklar detta arbetet med att skissa grafen. Vi fokuserar på om funktionen är udda, jämn eller ingetdera (se Definition 0.6). Ibland är det relevant att betrakta periodicitet, dvs om funktionen är periodisk med period P, vilket innebär att $f(x + P) = f(x)$ för alla x i definitionsmängden. Detta är främst relevant för trigonometriska funktioner, där t ex cos och sin är periodiska med period 2π.

Asymptoter Vi definierade vertikala och horisontella asymptoter i Definition 1.10. Vertikala asymptoter beskriver var $f(x)$ går mot oändligheten, medan horisontella asymptoter innebär att funktionsgrafen följer en horisontell linje då $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$. Att rita ut dessa linjer hjälper i skissandet av funktionen. Istället för horisontella asymptoter kan en funktion ha *sneda asymptoter*, vilket innebär att grafen följer en sned linje då $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$. Vi har inte pratat om sneda asymptoter än, och en precis definition kommer nedan.

Kritiska och singulära punkter, extrempunkter samt tillväxt och avtagande Att veta var funktionen är växande och avtagande, och var den har eventuella lokala och globala max- och minpunkter, är avgörande för att kunna rita grafen. Detta är vad vi gjorde i Avsnitt 2.10.

Konkavitet och inflexion Vetskap om var funktionen är konvex och konkav, och var eventuella inflexionspunkter finns, ger en mer finstämd information om grafens utseende. Detta gick vi igenom i Avsnitt 2.11.

Exempel 2.12.1

För att skissa kurvan $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ sätter vi $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ och tar ut informationen ovan. Vi börjar med informationen vi får från $f(x)$.

Definitionsmängd Funktionen f är definierad för alla $x \in \mathbb{R}$, dvs $D_f = \mathbb{R}$.

Skärning med koordinataxlarna Kurvan skär y-axeln där $y = f(0) = \frac{0^2-1}{0^2+1} = -1$. Den skär x-axeln där $f(x) = 0$, dvs där täljaren x^2-1 har nollställen, vilket är i $x = \pm 1$.

Symmetri Vi beräknar

$$f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1} = f(x),$$

vilket innebär att funktionen är jämn.

Asymptoter Eftersom $D_f = \mathbb{R}$ kan funktionen inte gå mot ∞ eller $-\infty$ då x går mot något $a \in \mathbb{R}$ från någon sida. Därför saknas vertikala asymptoter.

Vi undersöker vad som händer då $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$$

och detsamma gäller då $x \to -\infty$ på grund av symmetrin. Alltså har kurvan den horisontella asymptoten $y = 1$ både då $x \to \infty$ och då $x \to -\infty$.

Vi fortsätter med informationen vi får från $f'(x)$ och $f''(x)$, genom att beräkna dessa derivator och göra teckenstudium. För att effektivisera arbetet gör vi båda teckenstudier samtidigt. Vi lämnar det som övning att beräkna

$$\textcolor{blue}{f'(x)} = \frac{4x}{(x^2+1)^2} \quad \text{och} \quad \textcolor{purple}{f''(x)} = \frac{4-12x^2}{(x^2+1)^3},$$

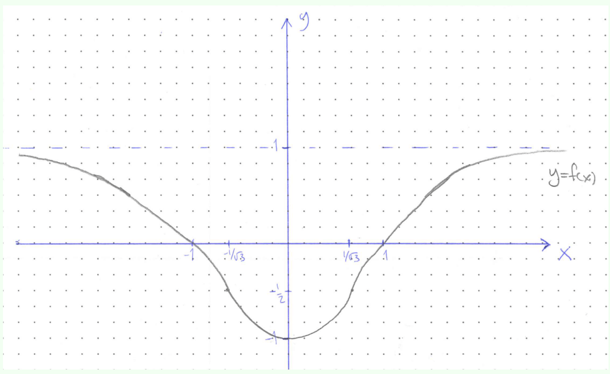
och ser att derivatan har ett nollställe i $x = 0$, och andraderivatan har nollställen i $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, där $4 - 12x^2 = 0$.

x		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
$f(x)$	$\frown$	inflexion	$\smile$	$\smile$	$\smile$	inflexion	$\frown$

Utgående från denna information kan man nu skissa kurvan. För att göra det bättre markerar vi först skärningar, asymptoter och liknande, och beräknar också funktionsvärdet i de speciella punkterna (minpunkt och inflexionspunkter): vi vet redan att $f(0) = -1$, och genom insättning får vi

$$f\left(\pm\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1} = -\tfrac{1}{2}.$$

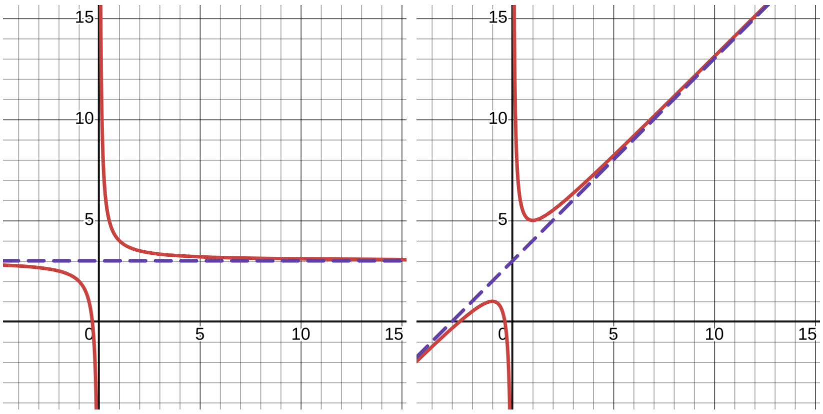
En handritad skiss kan då se ut som följer. Kontrollera gärna hur informationen använts i skissen, och jämför med en graf ritad i ett datorprogram.



Sneda asymptoter

Från Definition 1.10 vet vi att en funktion kan ha en horisontell asymptot $y = m$ då $x \to \infty$, nämligen om $\lim_{x\to\infty} f(x) = m$, dvs om $\lim_{x\to\infty} f(x) - m = 0$. Detta betyder alltså att avståndet mellan kurvan $y = f(x)$ och linjen $y = m$ går mot 0 då $x \to \infty$. Horisontella asymptoter då $x \to -\infty$ definierades på liknande sätt.

Betrakta graferna till $f(x) = \frac{1}{x} + 3$ (till vänster) och $g(x) = \frac{1}{x} + x + 3$ (till höger).



Vad händer då $x \to \infty$? Eftersom $\frac{1}{x} \to 0$ gäller att $\frac{1}{x} + 3 \to 3$, dvs $f(x) - 3 \to 0$, vilket man ser på att grafen $y = f(x)$ närmar sig den streckade linjen $y = 3$. Grafen till höger närmar sig den streckade linjen $y = x + 3$, eftersom $g(x) = \frac{1}{x} + x + 3$. Vi kan inte riktigt skriva att $g(x) \to x + 3$ då $x \to \infty$, eftersom x till höger om pilen också går mot ∞. Däremot gäller det att $f(x) - (x + 3) \to 0$ då $x \to \infty$. Detta bäddar för följande definition.

Definition 2.36

Låt k och m vara reella konstanter med $k \neq 0$.

Vi säger att linjen $y = kx + m$ är en **sned asymptot till kurvan $y = f(x)$ då $x \to \infty$** ifall

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - (kx + m)) = 0,$$

eller med andra ord $\lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = m$.

Vi säger att linjen $y = kx + m$ är en **sned asymptot till kurvan $y = f(x)$ då $x \to -\infty$** ifall $\lim_{x\to-\infty} (f(x) - (kx + m)) = 0$, eller med andra ord $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx) = m.$.

Observera att om $k = 0$ får vi tillbaka definitionen av en horisontell asymptot.

Hur beräknar vi sneda asymptoter? Funktionen $g(x) = \frac{1}{x} + x + 3$ har ett utseende som gör det lättare att se att vi har en sned asymptot. Den är nämligen på formen

$$g(x) = (\text{något som går mot 0 då } x \to \infty) + kx + m$$

vilket gör den sneda asymptoten lätt att läsa av. I allmänhet kan man använda följande sats för att undersöka om det finns en sned asymptot, och beräkna k och m.

Sats 2.37

Om $y = kx + m$ är en sned asymptot till $y = f(x)$, så är

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Motsvarande gäller då $x \to -\infty$.

Bevis: Att $y = kx + m$ är en sned asymptot innebär att $\lim_{x \to \infty} (f(x) - (kx + m)) = 0$. Om $(f(x) - (kx + m)) \to 0$ så gäller också att $(f(x) - (kx + m))/x \to 0$ pga att $x \to \infty$, dvs

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{kx}{x} - \frac{m}{x} \right) = 0.$$

Eftersom $\dfrac{kx}{x} = k$ och $\dfrac{m}{x} \to 0$ så ger detta

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k \right) = 0,$$

dvs $k = \lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Detta visar satsen då $x \to \infty$. Motsvarande fungerar då $x \to -\infty$.

Anmärkning 2.12.2

När man ska undersöka beteendet hos $f(x)$ då $x \to \infty$ är det därför rimligt att:

1. Börja med att undersöka $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Om detta gränsvärde existerar finns det en horisontell asymptot.
2. Om det inte finns en horisontell asymptot undersöker vi gränsvärdet $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Om det existerar kallar vi det för k, och undersöker gränsvärdet $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx)$ för det värde på k vi just fann. Om det existerar (dvs är lika med ett reellt tal m), så är $y = kx + m$ en sned asymptot, enligt definitionen ovan. Annars finns det ingen asymptot då $x \to \infty$.

Detta upprepar man sedan för $x \to -\infty$.

Notera att både horisontella och sneda asymptoter beskriver funktionens beteende då $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$. Vertikala asymptoter är annorlunda: de beskriver funktionens beteende då $x \to a$ (från ena eller båda hållen) ifall funktionsvärdet går mot ∞ eller $-\infty$ där. Att bestämma vertikala asymptoter är alltså oberoende av ovanstående, och man undersöker då sådana $a \in \mathbb{R}$ där funktionen inte är definierad och riskerar att gå mot $\pm\infty$.

Exempel 2.12.3

För att skissa kurvan $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ sätter vi $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ och arbetar som i Exempel 2.12.1. Vi börjar med informationen vi får från $f(x)$.

Definitionsmängd Funktionen f är definierad för alla $x \in \mathbb{R}$ utom där $x^2 = 1$, dvs $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Skärning med koordinataxlarna Kurvan skär y-axeln där $y = f(0) = \frac{0^3-1}{0^2-1} = 1$. För att hitta skärningar med x-axeln undersöker vi täljarens nollställen: $x^3 - 1$ har ett nollställe i $x = 1$ och är strängt växande, så den har inga andra nollställen. Men vi såg just att funktionen inte är definierad då $x = 1$, så f har inga skärningar med x-axeln.

Symmetri Om vi beräknar $f(-x)$ ser vi inga uppenbara samband med $f(x)$ och det verkar därför inte som att funktionen är udda eller

jämn.
Asymptoter För att bestämma vertikala asymptoter undersöker vi gränsvärdena då $x \to 1$ och $x \to -1$. För att lättare göra detta faktoriserar vi täljare och nämnare. Vad gäller nämnaren ger konjugatregeln att $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Vad gäller täljaren vet vi att $x = 1$ är ett nollställe, så enligt faktorsatsen är $x - 1$ en faktor. Med polynomdivision (kontrollera gärna detta) får man $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$. På f:s definitionsmängd gäller alltså

$$f(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x+1}.$$

Vi kan nu beräkna gränsvärdet då $x \to 1$ genom insättning:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{3}{2},$$

så det finns ingen vertikal asymptot vid $x = 1$. När $x \to -1$ går täljaren mot 1, och nämnaren mot 0. Nämnaren, och därmed $f(x)$, är positiv till höger om 1 och negativ till vänster, så

$$\lim_{x\to -1+} f(x) = \infty \quad \text{och} \quad \lim_{x\to -1-} f(x) = -\infty$$

så kurvan har en vertikal asymptot $x = -1$.

Vi söker nu horisontella och sneda asymptoter. Då $x \to \pm\infty$ har vi

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{x(1+\frac{1}{x})} = \frac{x(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{1+\frac{1}{x}}$$

som går mot ∞ då $x \to \infty$ och mot $-\infty$ då $x \to -\infty$. Därför har vi inga horisontella asymptoter. (Detta kunde vi också se från gradskillnaden mellan täljare och nämnare.) För att söka sned asymptot då $x \to \infty$ delar vi med x ovan, och får

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{\cancel{x}(1+\frac{1}{x})} = 1.$$

Därför har vi en möjlig sned asymptot $y = 1x + m$ då $x \to \infty$. Vi beräknar gränsvärdet av $f(x) - 1x$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{x+1} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1-x(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} = 0.$$

Därför har vi en sned asymptot $y = 1x + 0$, dvs $y = x$, då $x \to \infty$. Med liknande beräkningar får vi även $y = x$ som sned asymptot då $x \to -\infty$.

Vi fortsätter med informationen vi får från $f'(x)$ och $f''(x)$, genom att beräkna dessa derivator och göra teckenstudium. För att effektivisera arbetet gör vi båda teckenstudier samtidigt. Eftersom $x = 1$ inte ingår i definitionsmängden kan vi även i fortsättningen arbeta med uttrycket där vi förkortat bort $(x - 1)$. Enligt Anmärkning 2.2.1 kan vi använda vanliga deriveringsregler eftersom definitionsmängden är unionen av två öppna intervall. Vi lämnar det som övning att beräkna

$$f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} \quad \text{och} \quad f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \ ,$$

vilket gäller för alla x utom $x = \pm 1$, där inte ens $f(x)$ är definierat. Vi ser att derivatan har nollställen i $x = 0$ och $x = -2$, och att andraderivatan saknar nollställen.

x		-2		-1		0		1	
x	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	odef	$-$	0	$+$	odef	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	odef	$+$	$+$	$+$	odef	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	odef	$\searrow$	min	$\nearrow$	odef	$\nearrow$
$f(x)$	$\frown$	$\frown$	$\frown$	odef	$\smile$	$\smile$	$\smile$	odef	$\smile$

I de intressanta punkterna -2 och 0 är $f(-2) = -3$ och $f(0) = 1$. Nu har vi all information för att skissa kurvan, vilket läsaren uppmanas att göra. I samband med det kan det vara en bra idé att sammanfatta alla stegen i denna omfattande beräkning.

2.13 Tillämpning: optimering

Optimeringsproblem är problem där man vill bestämma det största eller minsta värde som en viss funktion antar. Målet är att optimera, dvs söka det bästa, i en viss situation. Sådana problem är mycket vanliga i tillämpningar, som till exempel

- vilken form ska en cylindrisk behållare av aluminium ha för att kunna rymma 1 liter med *minsta möjliga area* (för att minimera aluminiumåtgången);
- vilken form ska en solcell ha för att, med en given materialåtgång, ha *största möjliga effekt*,

och liknande. I och med Sats 2.32 har vi alla verktyg för att lösa sådana problem, och vi illustrerar detta med ett par exempel.

Exempel 2.13.1

Ett fotbollsmål består av en ribba och två stolpar som har en sammanlagd längd på 12 meter. Bestäm den höjd och bredd på målet som ger största möjliga area.

Lösning. Vi inför först några beteckningar: vårt mål (dvs fotbollsmålet) är rektangulärt, och vi kallar dess bas för b och dess höjd för h. Allt mäts i meter. Vårt mål (dvs vår avsikt) är att hitta globalt maximum av arean

$$A = bh$$

under villkoret att den totala längden (två stolpar och en ribba) ska vara 12 meter, dvs

$$b + 2h = 12.$$

Vi använder detta villkor för att lösa ut ena variabeln, t ex $b = 12 - 2h$, vilket ger oss arean som en funktion av en variabel

$$A = A(h) = (12 - 2h)h = 12h - h^2.$$

Definitionsmängden består av alla möjliga värden på h: det minsta värdet är 0 m (ribban läggs på marken) och det största möjliga värdet är 6 m (två stolpar, vardera 6 meter hög, placeras alldeles intill varandra utan ribba). Definitionsmängden är alltså $[0, 6]$. Detta är ett slutet och begränsat intervall, och funktionen $A(h)$ är kontinuerlig, eftersom den är ett polynom, så enligt Sats 1.17 har funktionen ett globalt maximum på intervallet. Enligt Sats 2.32 behöver vi undersöka

a) ändpunkter: $A(0) = 12 \cdot 0 - 2 \cdot 0^2 = 0$ (kvadratmeter) och $A(6) = 12 \cdot 6 - 2 \cdot 6^2 = 0$. Som väntat blir arean 0 i de ovan nämnda extremfallen;

b) singulära punkter: dessa är punkter där funktionen inte är deriverbar, vilka inte finns då funktionen är ett polynom;

c) kritiska punkter: dessa är punkter där derivatan är 0, dvs $A'(h) = 12 - 4h = 0$, dvs $h = 3$. Arean är då $A(3) = 12 \cdot 3 - 2 \cdot 3^2 = 18$.

Av värdena vi hittade ovan är alltså $A(3)$ det största. Slutsatsen blir att arean är som störst när stolparnas höjd är 3 meter (vilket ger $b = 6$, dvs en 6 meter lång ribba). Arean är då 18 kvadratmeter.

Exemplet illustrerar en allmän metod, som kan sammanfattas som följer:

1. Inför beteckningar och ta fram ett uttryck (en formel) för den storhet som ska maximeras eller minimeras. Rita gärna en figur.

2. Använd givna villkor så att den storheten kan uttryckas som en funktion av *en* variabel. Här ingår att ange definitionsmängden.

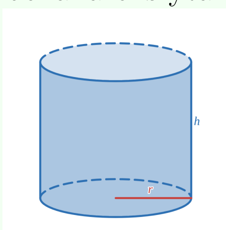
3. Bestäm värdet i eventuella ändpunkter, singulära punkter och kritiska punkter.

4. Avgör vilket värde som är störst eller minst, och motivera varför.

I den sista punkten handlar motiveringen om att visa att det måste existera ett maximum eller minimum. För kontinuerliga funktioner på slutna, begränsade intervall följer detta direkt från Sats 1.17. I andra fall måste man argumentera på något annat sätt, som i nästa exempel.

Exempel 2.13.2

En aluminiumbehållare i form av en cirkulär cylinder, med topp- och bottenskiva, ska rymma 1 kubikmeter. Bestäm den form på cylindern som minimerar behållarens yta.



Lösning.

1. Vi kallar cylinderns höjd för h och basens radie för r, som vi skrivit in i figuren ovan. Cylinderns yta består av mantelytan, som har arean av en rektangel med höjd h och bas $2\pi r$, dvs arean $2\pi rh$ (basskivans omkrets), samt topp- och bottenskivan, som är två cirkelskivor med radien r, dvs arean πr^2 vardera. Sammanlagt är
$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2.$$

2. Volymen av cylindern är basarean gånger höjden, dvs $\pi r^2 h$. Från villkoret att denna ska vara lika med 1 får vi
$$h = \frac{1}{\pi r^2}$$
vilket vi sätter in i uttrycket för arean och får
$$A = A(r) = 2\pi r\frac{1}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2}{r} + 2\pi r^2.$$
Vad gäller definitionsmängden så är $r > 0$ (om $r = 0$ blir volymen 0, vilket strider mot att den ska vara 1 och dessutom orsakar problem för kvoten $\frac{2}{r}$; däremot kan radien vara hur liten eller stor som helst så länge den är positiv, eftersom man kan kompensera detta med tillräckligt stor eller liten höjd). Definitionsmängden är alltså $(0, \infty)$.

3. Intervallet har inga ändpunkter, och $A(r)$ är deriverbar i alla $r > 0$, med
$$A'(r) = -\frac{2}{r^2} + 4\pi r = \frac{2}{r^2}(2\pi r^3 - 1).$$
Därmed finns det inga singulära punkter (då $r \neq 0$ på definitionsmängden), och ekvationen $A'(r) = 0$ är ekvivalent med
$$2\pi r^3 - 1 = 0$$
som ger oss en kritisk punkt $r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$. Eftersom definitionsmängden inte är sluten och begränsad måste vi motivera varför detta är en minimipunkt. Vi gör ett teckenstudium på intervallet $(0, \infty)$:

r		$\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$	
$2\pi r^3 - 1$	$-$	0	$+$
$A'(r)$	$-$	0	$+$
$A(r)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Därmed är punkten vi hittat verkligen ett minimum, som måste vara ett absolut minimum eftersom det är den enda extrempunkten. För minimal yta ska alltså behållaren ha radien $r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ meter, och därför höjden

$$h = \frac{1}{\pi r^2} = \frac{\sqrt[3]{2\pi}^2}{\pi} = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$$

meter.

Kontrollen vi gjorde i exemplet behövs för att visa att punkten mycket riktigt är ett minimum. Att intervallet inte är slutet och begränsat gör nämligen att det inte är garanterat att det finns ett minimum och ett maximum. I detta fall finns inget maximum — från uttrycket för $A(r)$ får man att $A(r) \to \infty$ både då $r \to 0^+$ och då $r \to \infty$. Detta är rimligt: man kan få arean godtyckligt stor sätt genom att göra radien tillräckligt stor och höjden tillräckligt liten, eller vice versa. (Detta obegränsade slöseri borde kanske kallas för en pessimering i motsats till en optimering.) Slutsatsen är att det inte alltid är givet att globala maxima och minima finns.

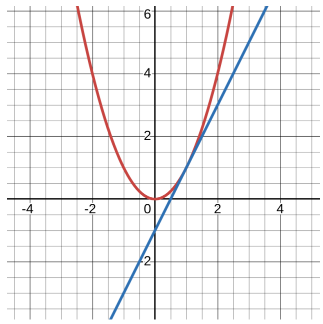
2.14 Att approximera funktioner: linjarisering

Målet med detta och nästa avsnitt är att approximera[3] funktioner med enklare funktioner. Detta är inte minst användbart i många modelleringsproblem: ett fenomen modelleras av en funktion som är relativt komplicerad, så man approximerar den med en annan funktion som är enklare. Det gäller då att avrundningsfelet inte är för stort, i alla fall inte i närheten av någon utgångspunkt.

[3] Att approximera, från latinets *proximus* i betydelsen *ytterst nära*, handlar om ett slags avrundning. Att approximera f med g betyder alltså att använda g som ett närmevärde till f.

Idé

Givet en funktion f och en punkt a i definitionsmängden till f söker en "enklare" funktion g så att $f(x) \approx g(x)$ så länge x är nära a.



Den kanske enklaste typen av approximation är linjärapproximation, där man approximerar en funktion med en linje. Antag exempelvis att vi vill approximera $f(x) = x^2$ i närheten av $a = 1$ med en linje. I figuren till höger har vi ritat kurvan $y = x^2$, tillsammans med tangentlinjen i punkten $x = 1$. Detta ger en till synes bra approximation i närheten av $x = 1$. I allmänhet kan man alltid välja tangentlinjen i $x = a$, så länge funktionen är deriverbar i a. Denna linje går genom $(a, f(a))$ och har lutning $f'(a)$, och en ekvation för den linjen är därför

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \Longleftrightarrow y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

och vi tar detta i vår definition av linjärapproximationen.

Definition 2.38

Om funktionen f är deriverbar i a, så definieras **linjariseringen av f kring a** som funktionen

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Approximationen $f(x) \approx L(x)$ kallas för **linjärapproximationen av f kring a**.

Idé

I linjärapproximationen av f kring a approximeras funktionen f av tangentlinjen till f i a, förutsatt att f är deriverbar där.

Exempel 2.14.1

Beräkna linjariseringen av $f(x) = e^x$ kring $x = 0$.

Lösning. Med $f(x) = e^x$ har vi $f'(x) = e^x$, så $f(0) = 1$ och $f'(0) = 1$. Detta ger

$$L(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) = 1 + 1 \cdot (x - 0) = 1 + x.$$

Exempel 2.14.2

Bestäm linjariseringen av $f(x) = 3x + 7$ kring $x = 2$.
Lösning. Vi beräknar $f(2) = 3 \cdot 2 + 7 = 12$. Derivatan $f'(x) = 3$ är konstant, så $f'(2) = 3$. Vi får därför

$$L(x) = f(2) + f'(2)(x - 2) = 12 + 3 \cdot (x - 2) = 12 + 3x - 6 = 3x + 7.$$

Vi fick alltså tillbaka $f(x)$, vilket är rimligt med tanke på att $y = f(x)$ redan är en rät linje.

I allmänhet gäller att linjariseringen av $f(x) = kx+m$ kring vilken punkt som helst är $y = kx + m$: den bästa approximationen av en rät linje med en rät linje får man genom att använda samma räta linje! Detta är ett tecken på att linjariseringen är definierad på ett bra sätt.

Anmärkning 2.14.3

- I linjariseringen

  $$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

  är alltså $f(a)$ och $f'(a)$ reella tal. Den enda förekomsten av variabeln x är i parentesen $(x-a)$ som multipliceras med $f'(a)$.

- Att $y = L(x)$ är tangentlinjen till $y = f(x)$ i a innebär att

  $$L(a) = f(a) \quad \text{och} \quad L'(a) = f'(a)$$

  det vill säga att L och f *både har samma värde och samma derivata i a*. Läsaren uppmanas att kontrollera detta genom att derivera $L(x)$ och sätta in $x = a$ i $L(x)$ och $L'(x)$. Eftersom en linje är helt bestämd av dess värde i en punkt och dess lutning (derivata) i den punkten, innebär detta att L beter sig "så likt f som en linje kan göra" i punkten a.

Linjariseringen är användbar eftersom den är mycket lättare att räkna med, och programmera, än den allmänna funktionen man börjar med. Vi illustrerar detta med ett exempel.

Exempel 2.14.4

Använd linjärapproximationen av $f(x) = \sqrt{x}$ kring en lämplig punkt för att beräkna ett ungefärligt värde på $\sqrt{26}$.

Lösning. Eftersom $26 \approx 25$, vars kvadratrot är lätt att beräkna, använder vi linjärapproximationen kring 25. Vi har $f(25) = \sqrt{25} = 5$, och från $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ får vi $f'(25) = \frac{1}{10}$. Linjariseringen är alltså

$$L(x) = 5 + \tfrac{1}{10}(x - 25)$$

så

$$L(26) = 5 + \tfrac{1}{10}(26 - 25) = 5 + \tfrac{1}{10} = \tfrac{51}{10}.$$

Linjärapproximationen ger alltså att $\sqrt{26} \approx \frac{51}{10} = 5.1$.

Man kan fråga sig hur stort avrundningsfelet är i denna approximation. Det exakta värdet, avrundat till tre decimaler, är 5.099, men oftast har man inte tillgång till det exakta värdet (och det är därför man approximerar). Kan man ändå säga något om avrundningsfelet? En av styrkorna med linjärapproximationen är att man kan det, vilket vi ska titta på härnäst.

Felet i en approximation

När man gör en approximation får man ett avrundningsfel, som definieras som mellanskillnaden mellan det exakta värdet och det avrundade värdet:

$$\text{Felet} = \text{exakta värdet} - \text{approximerade värdet}.$$

Om man t ex avrundar 9.15 till 9, dvs gör approximationen $9.15 \approx 9$, är felet $9.15 - 9 = 0.15$. Om man istället avrundar 8.85 till 9, så är felet $8.85 - 9 = -0.15$. Felet kommer alltså med ett tecken, vilket är mycket användbart, eftersom det talar om ifall avrundningen är uppåt eller nedåt.

I linje med detta synsätt har vi följande.

Definition 2.39

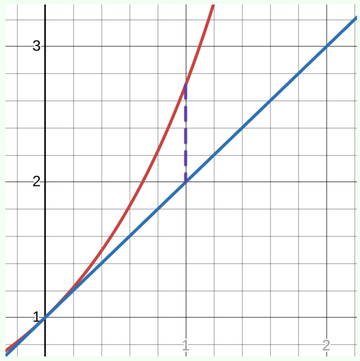
Antag att f är deriverbar i a och låt $L(x)$ vara linjariseringen av f kring a. **Felet i linjärapproximationen** $f(x) \approx L(x)$ betecknas $E(x)$ och definieras som

$$E(x) = f(x) - L(x).$$

Exempel 2.14.5

Vi såg tidigare att linjariseringen av $f(x) = e^x$ kring 0 är $L(x) = 1 + x$. Om vi använder linjärapproximationen $f(x) \approx L(x)$ med $x = 1$, har vi alltså

$$f(1) = e^1 = e \quad \text{och} \quad L(1) = 1 + 1 = 2$$



så vi får approximationen $e \approx 2$. Felet i denna approximation (avrundningsfelet) är då $f(1) - L(1) = e - 2$. I figuren till höger, där den röda kurvan $y = e^x$ och den blå linjen $y = 1 + x$ ingår, har felet markerats med en lodrät streckad linje.

För att alltså veta exakt vad felet är, måste man känna till både $f(x)$ och $L(x)$. Om man inte känner till $f(x)$ är det ändå möjligt att uppskatta felet, tack vare följande sats.

Sats 2.40

Antag att f är två gånger deriverbar i a och låt $L(x)$ vara linjariseringen av f kring a. Felet $E(x)$ uppfyller

$$E(x) = \frac{f''(s)}{2}(x - a)^2$$

för något s mellan a och x.

Denna sats är ett specialfall av den mer allmänna Taylors sats (Sats 2.44), som vi kommer att bevisa i nästa avsnitt. Två saker är värda att notera i detta uttryck för felet:

- I andraderivatan $f''(s)$ är s någon punkt mellan a och x. (När vi approximerade $\sqrt{26}$ i Exempel 2.14.4 hade vi $a = 25$ och $x = 26$, så s är något tal som uppfyller $25 < s < 26$.) Vi har inget sätt att beräkna detta s, så därför tjänar denna formel bara som en uppskattning, inte som en exakt beräkning. Detta är rimligt: hade vi kunnat veta det exakta värdet på $E(x)$ utifrån approximationen, dvs hade vi vetat både $L(x)$ och $E(x)$ exakt, så hade vi kunnat beräkna $f(x)$ exakt, eftersom definitionen av felet ger $f(x) = L(x) + E(x)$.

- Uttrycket $(x - a)$ förekommer både i $L(x)$ och i $E(x)$, men i $E(x)$ är det upphöjt till 2. Detta kan tolkas som att felet är litet, dvs approximationen är bra. Låt oss titta närmare på detta: approximationen kring a är användbar då x är nära a, dvs $x - a$ är nära noll. Om exempelvis $x - a = 0.1$, så är $(x - a)^2 = 0.01$. I denna mening är alltså felet *en storleksordning mindre* än $x - a$. Man kan visa att linjärapproximationen av $f(x)$ kring $x = a$ är den enda approximationen av $f(x)$ med en rät linje, som har denna egenskap. På så sätt är det därför den bästa approximationen med en rät linje. den

Låt oss tillämpa satsen i ett exempel, där innebörden av observationerna ovan blir tydlig.

Exempel 2.14.6

Hur stort är felet i approximationen från Exempel 2.14.4?
Lösning. Vi approximerar alltså $\sqrt{x}$ för $x = 26$ genom linjärapproximation kring $a = 25$. Enligt Sats 2.40 är

$$E(x) = \frac{f''(s)}{2}(x-a)^2$$

för något s mellan a och x. I vårt fall är

$$(x-a)^2 = (26-25)^2 = 1$$

och upprepad derivering ger

$$f''(s) = -\frac{1}{4s^{3/2}},$$

så

$$E(26) = \frac{f''(s)}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{8s^{3/2}}$$

där $25 < s < 26$. Trots att vi inte kan beräkna vad s är, kan vi göra en uppskattning av felet. Till att börja med är felet negativt. Vidare är $\frac{1}{8s^{3/2}}$, dvs absolutbeloppet av felet, är större ju mindre s är. Att $25 < s < 26$ innebär därför att detta tal är mindre än

$$\frac{1}{8 \cdot 25^{3/2}} = \frac{1}{8 \cdot 5^3} = \frac{1}{1000}.$$

Vi vet alltså nu att felet är negativt, och att beloppet av felet är mindre än $1/1000$.
Slutsats Vi har $-0.001 < E(26) < 0$.

Att felet är negativt innebär att det exakta värdet är mindre än det approximerade värdet. Geometriskt beror detta på att kurvan $y = f(x)$ ligger på undersidan till tangentlinjen $y = L(x)$. Detta beror på att funktionen är konkav, dvs att andraderivatan är negativ, vilket ju precis var det som bidrog till felets negativa tecken.

Vi kan använda föregående exempel för att lösa följande problem.

Exempel 2.14.7

Ange ett intervall där $f(26) = \sqrt{26}$ med säkerhet befinner sig.
Lösning. Vi vill hitta ett intervall där $f(26)$ befinner sig. Från definitionen av felet

$$E(x) = f(x) - L(x)$$

får vi

$$f(x) = L(x) + E(x)$$

dvs

$$\sqrt{26} = L(26) + E(26).$$

Från Exempel 2.14.4 vet vi att $L(26) = 5.1$, och från Exempel 2.14.6 vet vi att $-0.001 < E(26) < 0$. Därför är

$$5.099 < \sqrt{26} < 5.1,$$

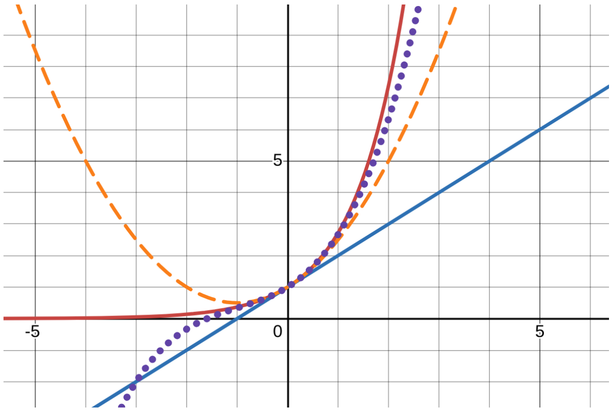
dvs $\sqrt{26}$ befinner sig i intervallet $(5.099, 5.1)$.

2.15 Att approximera bättre: taylorutveckling

I det förra avsnittet approximerade vi $f(x)$ med linjariseringen $L(x)$, som är ett polynom av grad 1, i närheten av en punkt a. I detta avsnitt kommer vi att använda polynom av högre grad för att få ännu bättre approximationer.

För att illustrera vårt mål, betraktar vi $f(x) = e^x$ i närheten av $x = 0$. I exempel 2.14.1 beräknade vi linjariseringen kring 0, nämligen $L(x) = 1+x$. I figuren nedan har vi ritat graferna till $f(x)$ och $L(x)$, men även till polynomen

$$1 + x + \frac{x^2}{2} \quad \text{(streckad i gult), och} \quad 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \quad \text{(prickig i lila).}$$



Dessa verkar ge successivt bättre approximationer av e^x i närheten av 0. En fråga är var koefficienterna kommer från, och hur man gör detta i allmänhet. Svaret ges av följande definition.

Definition 2.41

Låt f vara en funktion och $a \in \mathbb{R}$ sådan att $f(a), f'(a), f''(a), \ldots, f^{(n)}(a)$ är definierade. Polynomet

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

kallas för **taylorpolynomet av ordning** n **till** f **kring** a.

Ordet **taylorutveckling** används ibland om taylorpolynomet eller om beräkningen av taylorpolynomet.

Exempel 2.15.1

Vi beräknar taylorpolynomen av ordning 1, 2 och 3 till $f(x) = e^x$ kring 0. Observera att f uppfyller $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x$. Vi får

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) \\ &= e^0 + e^0 x \\ &= 1 + x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 \\ &= e^0 + e^0 x + \frac{e^0}{2}x^2 \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2}, \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} P_3(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 \\ &= e^0 + e^0 x + \frac{e^0}{2}x^2 + \frac{e^0}{6}x^3 \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}, \end{aligned}$$

vilket är precis de polynom vi såg i figuren ovan.

Anmärkning 2.15.2

I exemplet såg vi att $P_1(x)$ stämde överens med linjariseringen. Detta följer allmänt från definitionen, eftersom

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = L(x).$$

Linjariseringen kring a är alltså lika med taylorpolynomet av ordning 1 kring a, och i den meningen är taylorpolynomen generaliseringar av linjariseringen. Man kan i det sammanhanget fråga sig vad taylorpolynomet av ordning 0 är. Per definition är detta

$$P_0(x) = f(a),$$

dvs den konstanta funktion vars värde är lika med värdet av f i a. Även detta ger en (oftast dålig) approximation av f kring a.

Nästa anmärkning ger en förklaring till nämnarna i koefficienterna i taylorpolynomen.

Anmärkning 2.15.3

Taylorpolynomet $P_n(x)$ är ett polynom av grad högst n och uppfyller

$$P_n(a) = f(a),\ P_n'(a) = f'(a),\ P_n''(a) = f''(a),\ \ldots,\ P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a),$$

dvs polynomet och dess n första derivators värde i a stämmer överens med funktionens. Man kan visa detta med induktion, men vi nöjer oss att titta på derivatorna upp till tredjederivatan, vilket ger en bra bild av vad som händer. Från

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

får vi

$$P_n(a) = f(a) + f'(a)(a-a) + \frac{f''(a)}{2!}(a-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(a-a)^n,$$

och då $a - a = 0$ är det endast termen $f(a)$ som är kvar, så $P_n(a) = f(a)$. Deriverar vi $P_n(x)$ så får vi

$$P_n'(x) = 0 + f'(a)\cdot 1 + \frac{f''(a)}{2!}2(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}n(x-a)^{n-1}$$

och insättning av a ger

$$P_n'(a) = 0 + f'(a)\cdot 1 + \frac{f''(a)}{2!}2(a-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}n(a-a)^{n-1}.$$

På samma sätt försvinner alla termer som innehåller faktorn $a - a$, och kvar är $f'(a)$, så $P_n'(a) = f'(a)$. Deriverar vi $P_n'(x)$ får vi

$$P_n''(x) = 0 + \frac{f''(a)}{2!}2\cdot 1 + \frac{f'''(a)}{3!}3\cdot 2(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}n(n-1)(x-a)^{n-2}$$

och sätter vi in a får vi på samma sätt som ovan endast $\frac{f''(a)}{2!}2\cdot 1 = f''(a)$ kvar, så $P_n''(a) = f''(a)$. Deriverar vi slutligen $P_n''(x)$ får vi

$$P_n'''(x) = 0 + \frac{f'''(a)}{3!}3\cdot 2\cdot 1 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}n(n-1)(n-2)(x-a)^{n-3}$$

och sätter vi in a så får vi $P_n'''(a) = \frac{f''(a)}{3!}3\cdot 2\cdot 1 = f'''(a)$. Notera hur fakulteten i nämnaren förkortas mot de exponenter som faller ner i deriveringen. På samma sätt kommer det att fungera fram till och med n derivatan. Notera att eftersom $P_n(x)$ har grad högst n, så är $(n + 1)$-derivatan och uppåt lika med 0.

Exempel 2.15.4

Bestäm taylorpolynomet av ordning 3 till $f(x) = \sin x$ kring $x = \pi$.
Lösning. Per definition har vi

$$P_n(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi) + \frac{f''(\pi)}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{f'''(\pi)}{3!}(x-\pi)^3.$$

Vi har $f(\pi) = \sin \pi = 0$, och beräknar derivatorna

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x \quad \text{och} \quad f'''(x) = -\cos x$$

vilket ger

$$f'(\pi) = \cos \pi = -1, \quad f''(\pi) = -\sin \pi = 0 \quad \text{och} \quad f'''(\pi) = -\cos \pi = 1,$$

så

$$P_n(x) = 0 - 1 \cdot (x-\pi) + 0 \cdot (x-\pi)^2 + \frac{1}{3!}(x-\pi)^3 = (x-\pi) + \tfrac{1}{6}(x-\pi)^3.$$

Notera att det är en fördel för läsbarheten att inte bryta upp faktorerna $(x-\pi)$.

Taylorpolynom kring 0 är särskilt användbara (eftersom många tillämpningar berör värden på variabeln x som är "små", dvs nära 0). Dessa har ett eget namn.

Definition 2.42

Taylorpolynomet av ordning n till funktionen f kring $x = 0$ kallas för **maclaurinpolynomet av ordning n till f**.

Exempel 2.15.5

Bestäm maclaurinpolynomet av ordning 3 till $f(x) = \cos x$.
Lösning. Per definition har vi

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x + \frac{f'''(0)}{3!}x^3.$$

Genom att derivera och sätta in $x = 0$ får vi

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -1 \quad \text{och} \quad f'''(0) = 0$$

vilket ger

$$P_n(x) = 1 + 0x - \tfrac{1}{2}x^2 + 0x^3 = 1 - \tfrac{1}{2}x^2.$$

Notera att polynomet har grad $2 < 3$ eftersom x^3-koefficienten är 0. Därför använder vi ordet "ordning" snarare än grad i definitionen av taylor- och maclaurinpolynom.

Exempel 2.15.6

Bestäm maclaurinpolynomet av ordning n till $f(x) = e^x$.
Lösning. Vi har

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

där $f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$. Därför är

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n,$$

dvs koefficienten framför x^k är $\dfrac{1}{k!}$ för varje k mellan 0 och n.

Exempel 2.15.7

Bestäm maclaurinpolynomet av ordning 3 till $f(x) = x^2 + 3x + 5$.
Lösning. Vi har

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x + \frac{f'''(0)}{3!}x^3.$$

Genom att derivera och sätta in $x = 0$ får vi

$$f(0) = 5, \quad f'(0) = 3, \quad f''(0) = 2 \quad \text{och} \quad f'''(0) = 0$$

vilket ger

$$P_n(x) = 5 + 3x + \tfrac{2}{2}x^2 + 0x^3 = x^2 + 3x + 5.$$

Vi fick alltså tillbaka $f(x)$. Notera att $f(x)$ är ett polynom av grad 2, och som vi försöker approximera med ett polynom $P_3(x)$ av grad högst 3. Att $P_3(x) = f(x)$ är rimligt, eftersom den bästa approximationen av ett polynom av grad ≤ 3 med ett polynom av grad ≤ 3 får man genom att använda polynomet själv. Jämför detta med Exempel 2.14.2.

Taylors sats och feluppskattning

Det vi gjort hittills antyder att man kan approximera $f(x)$ med taylorpolynomet $P_n(x)$ kring a, i alla fall då x är nära a. Vi undrar därför hur bra denna så kallade **taylorapproximation** är, dvs hur stort felet är. Vi definierar felet på liknande sätt som för linjärapproximationen.

Definition 2.43

Antag att f är n gånger deriverbar i a och låt $P_n(x)$ vara taylorpolynomet av ordning n till f kring a. **Felet i taylorapproximationen** $f(x) \approx P_n(x)$ betecknas $E_n(x)$ och definieras som

$$E(x) = f(x) - P_n(x).$$

Hur vet vi att taylorapproximationen är så bra? På samma sätt som Sats 2.40 gav oss ett uttryck för felet i linjärapproximationen, gör nästa sats motsvarande för taylorapproximationen, och svarar på sätt och vis på den frågan.

Sats 2.44: Taylors sats

Antag att f är $n+1$ gånger deriverbar i ett intervall kring a och låt $P_n(x)$ vara taylorpolynomet av ordning n till f kring a. För alla $x \neq a$ på detta intervall uppfyller felet $E_n(x)$ att

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

för något s mellan a och x. Med andra ord är

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \tfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{P_n(x)} + \underbrace{\tfrac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{E_n(x)}.$$

Notera att i specialfallet då $n = 1$ är detta precis Sats 2.40, vilket är rimligt med tanke på att $P_1(x) = L(x)$, som vi redan konstaterat. Det är på sin plats att stanna upp och reflektera över hur viktig och användbar Taylors sats är.

Idé

Satsen säger att felet är en faktor gånger $(x-a)^{n+1}$. Denna faktor beror förvisso på s mellan a och x, men är begränsad. Poängen med satsen är alltså följande: när man approximerar en funktion med dess taylorpolynom av ordning n, så är avrundningsfelet lika med ett begränsat uttryck gånger $(x-a)^{n+1}$. Man säger att felet är *av (storleks)ordning* $(x-a)^{n+1}$. Detta är mycket användbart: när x är nära a så är $(x-a)$ litet, och $(x-a)^{n+1}$ kan därför göras så litet vi behöver genom att välja n tillräckligt stort. Vi återkommer till detta längre ner.

Anmärkning 2.15.8: Teoretisk anmärkning

Man kan visa att taylorpolynomet kring $x = a$ är det *enda* polynom av av grad högst n, sådant att felet, dvs skillnaden mellan $f(x)$ och polynomet, är lika med ett begränsat uttryck gånger $(x-a)^{n+1}$. I denna mening är taylorapproximationen den bästa approximationen av $f(x)$ nära $x = a$ med ett polynom av grad högst n: det är det enda som förskjuter felet (minst) en storleksordning.

Beviset av Taylors sats är något långt och tekniskt, och ingår inte i kursen, men vi har alla verktyg som behövs. Vi ger först beviset i specialfallet $n = 0$, som är kort och fångar idén i det allmänna beviset.

Bevis i specialfallet $n = 0$: Vi ska alltså visa att $f(x) - P_0(x) = \frac{f'(s)}{0!}(x-a)^1$ för något s mellan a och x. Notera att $P_0(x) = f(a)$ och att $0! = 1$, så det som ska visas är

$$f(x) - f(a) = f'(s)(x-a) \quad \text{dvs} \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(s)$$

för något s mellan a och x. Men detta är precis påståendet i medelvärdessatsen, som gäller då f är deriverbar på intervallet.

Beviset i det allmänna fallet bygger på en upprepad användning av medelvärdessatsen, och presenteras i slutet av kapitlet.

I följande två exempel använder vi maclaurinpolynomen $P_n(x)$ till $f(x) = e^x$ för att bestämma ett ungefärligt värde på $f(1) = e$. Vi utgår bara från att vi vet att $e < 3$.

Exempel 2.15.9

Betrakta approximationen $e \approx P_n(1)$, där $P_n(x)$ är maclaurinpolynomet av ordning n till e^x. Beräkna $P_n(1)$ och uppskatta felet då n är 3 respektive 4.

Lösning. Från Exempel 2.15.6 vet vi att

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

så

$$P_3(1) = 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} = \frac{8}{3}$$

och

$$P_4(1) = 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} = \frac{65}{24}.$$

Vi söker nu felen $E_3(1)$ och $E_4(1)$. Enligt Taylors sats är

$$E_n(1) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} 1^{n+1} = \frac{e^s}{(n+1)!}$$

för något $0 < s < 1$, eftersom $f^{(n+1)}(s) = e^s$. Då $e < 3$ och $0 < s < 1$ så gäller $e^s < 3^1 = 3$, så

$$E_n(1) = \frac{e^s}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Sätter vi in $n = 3$ respektive $n = 4$ får vi

$$E_3(1) = \frac{1}{8} = 0.125 \quad \text{och} \quad E_4(1) = \frac{1}{40} = 0.025.$$

Slutsats Om vi använder $P_3(1)$ får vi approximationen $e \approx \frac{8}{3} = 2.66\ldots$ med ett fel som är mindre än $\frac{1}{8} = 0.125$. Om vi använder $P_3(1)$ får vi approximationen $e \approx \frac{65}{24} = 2.70833\ldots$ med ett fel som är mindre än $\frac{1}{40} = 0.025$. (Felet är positivt i båda fallen, vilket innebär att approximationen är mindre än det exakta värdet.)

Exempel 2.15.10

Antag att vi vill välja n så att approximationen i förra exemplet är korrekt med en decimals noggrannhet. Detta betyder att felet ska vara inom ± 0.05, dvs felets belopp är högst 0.05 så att det avrundas korrekt till närmaste decimal. I det förra exemplet såg vi att $E_4(1) < 0.025$, vilket är tillräckligt litet.

Med andra ord är $e \approx \frac{65}{24}$ korrekt inom en decimals noggrannhet. Notera att vi kan vara säkra på detta utan att veta det exakta värdet på e (vi använde bara att $e < 3$). Detta visar styrkan i Taylors sats.

Om vi vill att approximationen ska vara korrekt med två decimalers noggrannhet behöver vi garantera att felet är inom ± 0.005. Vi lämnar det som övning att beräkna att $E_5(1) < \frac{1}{240} < 0.005$, vilket innebär att $P_5(1)$ är en tillräckligt noggrann approximation. Vi får

$$e \approx P_5(1) = 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} + \frac{1^5}{5!} = 2.7166\ldots \approx 2.72,$$

vilket är en korrekt approximation med två decimalers noggrannhet.

Storleksordning och gränsvärden

I det förra exemplet var vi noga med felets storlek. Ofta är man inte intresserad av hur stort felet är, utan bara av felets "storleksordning", vilket i det här sammanhanget betyder vilken potens av x som ingår. Vi rörde vid detta i idén ovan, och kommer nu använda det noggrannare. Vi illustrerar idéerna i följande exempel.

Exempel 2.15.11

Ovan såg vi att maclaurinpolynomet av ordning 2 till $f(x) = e^x$ är

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

och motsvarande felterm är

$$E_2(x) = \frac{f'''(s)}{3!}x^3 = \frac{e^s}{6}x^3$$

för något s mellan 0 och x. Eftersom feltermen per definition är differensen $f(x) - P_2(x)$, innebär detta att

$$f(x) = P_2(x) + E_2(x)$$

dvs

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{e^s}{6}x^3.$$

Observera att detta är en likhet som gäller exakt. Det kan verka konstigt, men det beror på att s är något okänt tal som beror på vad x är och som varierar som funktion av x. Istället för att försöka uppskatta vad $\frac{e^s}{6}$ är, nöjer vi oss med att konstatera att det är en *begränsad funktion av x i närheten av 0*, dvs att oavsett vilket x nära 0 vi väljer, så finns det ett s mellan 0 och x så att $\frac{e^s}{6}$ är ett (ändligt) tal och likheten ovan gäller. Vi kallar denna funktion för $B(x)$, så vi har

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + B(x)x^3$$

där $B(x)$ är begränsad nära 0.

Vad vi har gjort i exemplet ovan är att skriva en funktion som summan av ett maclaurinpolynom och en felterm, där vi inte bryr oss om feltermens exakta utseende, utan bara om att det är en begränsad funktion multiplicerad med någon potens av x. Detta är t ex användbart för att beräkna gränsvärden, vilket följande exempel illustrerar.

Exempel 2.15.12

Beräkna $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{3x}$.

Lösning. Observera att både täljare och nämnare går mot 0 då $x \to 0$, så vi har en "$\frac{0}{0}$-situation" som behöver noggrannare analys. Eftersom $x \to 0$ är vi intresserade av funktionens beteende nära 0, så vi använder maclaurinpolynomet till e^x, och omskrivningen

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + B(x)x^3$$

från förra exemplet. Vi får

$$\frac{e^x-1}{3x} = \frac{1+x+\frac{x^2}{2}+B(x)x^3-1}{3x} = \frac{x+\frac{x^2}{2}+B(x)x^3}{3x} = \frac{1}{3}+\frac{x}{6}+\frac{B(x)x^2}{3}.$$

När $x \to 0$ går $\frac{x}{6}$ mot 0. Vad $B(x)$ går mot vet vi inte, men eftersom funktionen är begränsad nära 0, och $x^2 \to 0$, följer det från klämsatsen[a] att $B(x)x^2 \to 0$. Alltså är

$$\frac{e^x-1}{3x} = \frac{1}{3}+\frac{x}{6}+\frac{B(x)x^2}{3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{3}+0+0 = \frac{1}{3},$$

så gränsvärdet är $\frac{1}{3}$.

[a] Att $B(x)$ är begränsad betyder alltså att $m \leq B(x) \leq M$ för några konstanter m och M, så $mx^2 \leq B(x)x^2 \leq Mx^2$, och klämsatsen kan användas.

Detta är ett exempel på en mer allmän idé.

Idé

För att beräkna gränsvärden då $x \to a$ kan taylorutveckling av ordning n kring a användas. Felet behöver inte beräknas exakt, utan det räcker att veta att det är lika med $B(x)\cdot(x-a)^{n+1}$, där $B(x)$ är en funktion som är begränsad kring a.

Här kan det vara bra att samla maclaurinutvecklingarna, med felterm, till de vanligaste funktionerna vi stöter på.

Sats 2.45: Vanliga maclaurinutvecklingar

Vi har

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}B_1(x), \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1}B_2(x), \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2}B_3(x), \\
\ln(x+1) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^{n+1}B_4(x), \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1}B_5(x),
\end{aligned}
$$

och

$$
\begin{aligned}
(x+1)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \cdots \\
&+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^n}{n!} + x^{n+1}B_6(x),
\end{aligned}
$$

där $B_1, \ldots, B_6$ är funktioner som är begränsade i ett intervall kring $x = 0$.

Exempel 2.15.13

Beräkna

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + x^6}{x - \sin x}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) + x\cos x}{\arctan x}$.

Lösning.

a) Vi maclaurinutvecklar $\sin x$. Eftersom den lägsta potensen i täljaren är x^3 använder vi maclaurinpolynomet av ordning 3. Från satsen ovan får vi

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3} + x^4 B(x)$$

där B är begränsad nära 0. Insättning ger

$$\frac{x^3+x^6}{x-\sin x} = \frac{x^3+x^6}{x-(x-\frac{x^3}{3}+x^4B(x))} = \frac{x^3+x^6}{\frac{x^3}{3}-x^4B(x)}$$

och förkortning med x^3 ger att detta är lika med

$$\frac{1+x^3}{\frac{1}{3}-xB(x)}.$$

Både x^3 och $xB(x)$ går mot 0 då $x \to 0$, på grund av att B är begränsad. Hela uttrycket går därför mot

$$\frac{1+0}{\frac{1}{3}-0} = 3$$

så gränsvärdet är 3.

b) Maclaurinutveckling ger

$$\ln(x+1) = x + x^2B_1(x),$$

$$\cos x = 1 + x^2B_2(x)$$

och

$$\arctan x = x + x^3B_3(x)$$

där B_1, B_2 och B_3 är begränsade kring 0. Insättning ger

$$\begin{aligned}\frac{\ln(x+1)+x\cos x}{\arctan x} &= \frac{x+x^2B_1(x)+x(1+x^2B_2(x))}{x+x^3B_3(x)} \\ &= \frac{x+x^2B_1(x)+x+x^3B_2(x)}{x+x^3B_3(x)} \\ &= \frac{2x+x^2(B_1(x)+xB_2(x))}{x+x^3B_3(x)} \\ &= \frac{\cancel{x}(2+x(B_1(x)+xB_2(x)))}{\cancel{x}(1+x^2B_3(x))}\end{aligned}$$

och när $x \to 0$ går detta mot 2. Gränsvärdet är alltså 2.

Vi ska nu införa en praktisk notation för ovanstående beräkningar. I korta drag handlar det om att skriva $\mathcal{O}((x-a)^n)$ istället för $B(x)\cdot(x-a)^n$

för feltermen i taylorutvecklingen. Denna notation används ofta i komplexitetsteori inom matematik och datavetenskap. Den kan verka märklig vid en första anblick, men är praktisk att lära sig.

Definition 2.46

Låt f och g vara funktioner definierade i ett intervall kring $x = a$. Om $f(x) = B(x)g(x)$, där $B(x)$ är begränsad på ett intervall kring $x = a$, skriver vi

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \text{ kring } x = a$$

och läser detta som $f(x)$ **är stora O av** $g(x)$ **kring** $x = a$ eller $f(x)$ **är stora ordo av** $g(x)$ **kring** $x = a$.

Notationen kommer från det latinska ordet *ordo* som betyder ordning. Idén är alltså att $f(x)$ är av samma storleksordning som $g(x)$ i ett intervall kring $x = a$.

Exempel 2.15.14

a) Vi har $5x^2 = \mathcal{O}(x^2)$ kring $x = 0$, eftersom $5x^2$ ju är en konstant gånger x^2.

b) Vi har $(x-1)^3 e^x = \mathcal{O}((x-1)^3)$ kring $x = 1$, eftersom e^x är begränsad i ett intervall kring $x = 1$.

c) VI har $x^5 = \mathcal{O}(x^3)$ kring $x = 0$, eftersom $x^5 = x^2 \cdot x^3$, och x^2 är begränsad i ett intervall kring $x = 0$.

Vi upprepar nu Exempel 2.15.13 med denna nya notation.

Exempel 2.15.15

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + x^6}{x - \sin x}$, och

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x\cos x}{\arctan x}$.

Lösning.

a) Vi maclaurinutvecklar $\sin x$ enligt ovan och får

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4).$$

Insättning ger

$$\frac{x^3+x^6}{x-\sin x} = \frac{x^3+x^6}{x-(x-\frac{x^3}{3}+\mathcal{O}(x^4))} = \frac{x^3+x^6}{\frac{x^3}{3}-\mathcal{O}(x^4)}$$

och förkortning med x^3 ger att detta är lika med

$$\frac{1+x^3}{\frac{1}{3}-\mathcal{O}(x)}.$$

Både x^3 och $\mathcal{O}(x)$ går mot 0 då $x \to 0$. Hela uttrycket går därför mot

$$\frac{1+0}{\frac{1}{3}-0} = 3$$

så gränsvärdet är 3.

b) Maclaurinutveckling ger

$$\ln(x+1) = x + \mathcal{O}(x^2),$$

$$\cos x = 1 + \mathcal{O}(x^2)$$

och

$$\arctan x = x + \mathcal{O}(x^3)$$

Insättning ger

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(x+1)+x\cos x}{\arctan x} &= \frac{x+\mathcal{O}(x^2)+x(1+\mathcal{O}(x^2))}{x+\mathcal{O}(x^3)} \\
&= \frac{x+\mathcal{O}(x^2)+x+\mathcal{O}(x^3)}{x+\mathcal{O}(x^3)} \\
&= \frac{2x+\mathcal{O}(x^2)}{x+\mathcal{O}(x^3)} \\
&= \frac{\cancel{x}(2+\mathcal{O}(x))}{\cancel{x}(1+\mathcal{O}(x^2))}
\end{aligned}$$

och när $x \to 0$ går detta mot 2. Gränsvärdet är alltså 2.

Notera vad som hände vid förkortningen:

$$\frac{\mathcal{O}(x^4)}{x^3} = \mathcal{O}(x).$$

Detta är i linje med vad som hände i Exempel 2.15.13. Det beror på att $\mathcal{O}(x^4)$ innebär att något är lika med $B(x)x^4$ med en begränsad funktion $B(x)$, så om vi delar med x^3 så återstår $B(x)x = \mathcal{O}(x)$. Då ser man också varför $\mathcal{O}(x) \to 0$ då $x \to 0$. Motsvarande gäller för

$$x\mathcal{O}(x^2) = \mathcal{O}(x^3) \quad \text{och} \quad \mathcal{O}(x^2) + \mathcal{O}(x^3) = \mathcal{O}(x^2).$$

(Jämför med motsvarande beräkningar i Exempel 2.15.13 för att övertyga dig om att detta gäller.)

Mer allmänt har vi följande.

Sats 2.47

a) Om $f(x) = \mathcal{O}((x-a)^m)$ kring $x = a$, så är $(x-a)^n f(x) = \mathcal{O}((x-a)^{m+n})$ kring $x = a$.

b) Om $f(x) = \mathcal{O}((x-a)^m)$ kring $x = a$ och $n \leq m$, så är $\dfrac{f(x)}{(x-a)^n} = \mathcal{O}((x-a)^{m-n})$ kring $x = a$.

c) Om $f(x) = \mathcal{O}((x-a)^m)$ kring $x = a$, och $g(x) = \mathcal{O}((x-a)^n)$, så är $f(x) + g(x) = \mathcal{O}((x-a)^n)$, om och $n \leq m$.

Specialfallet $a = 0$ är det som är relevant för maclaurinutveckling.

Anmärkning 2.15.16: Tips

Istället för att lära sig denna sats utantill, är det en bra idé, om man blir osäker på ordo, att *alltid gå tillbaka till definitionen* och skriva om $f(x) = \mathcal{O}((x-a)^n)$ som $f(x) = (x-a)^n B(x)$, där B är begränsad i närheten av a.

Anmärkning 2.15.17: Teoretisk anmärkning

Notationen $\mathcal{O}$ förkortar bort en hel del — så pass att det som är kvar beter sig konstigt. Påståendet $\mathcal{O}(x^2) + \mathcal{O}(x^3) = \mathcal{O}(x^2)$, till exempel, är inte en vanlig ekvation, och likheten beter sig märkligt. Det likheten betyder är att x^2 *gånger någon begränsad funktion plus* x^3 *gånger någon (annan) begränsad funktion är lika med* x^2 *gånger någon (tredje) begränsad funktion*, dvs

$$x^2 B_1(x) + x^3 B_2(x) = x^2 B_3(x)$$

vilket är sant om vi väljer $B_3(x) = B_1(x) + xB_2(x)$. Skrivsättet

$f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ betyder alltså egentligen att *det existerar en begränsad funktion* $B(x)$ *sådan att* $f(x) = B(x)g(X)$, eller med andra ord att $f(x)$ *tillhör mängden av alla funktioner som är lika med någon begränsad funktion gånger* $g(x)$.

Vi avslutar med några variationer på temat.

Exempel 2.15.18

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x)-1}{\sin(x^2)}$, och   b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{(x-1)^2}$.

Lösning. Notera att i båda fallen går täljare och nämnare mot 0, så det behövs en närmare analys för att avgöra om gränsvärdet existerar och i så fall beräkna det.

a) Svårigheten här är att vi har sammansatta funktioner som $\cos(3x)$. En metod är att beräkna maclaurinutvecklingen för hand, men man kan också notera att $3x \to 0$ då $x \to 0$, så vi kan använda maclaurinutvecklingarna ovan med variabeln $3x$ istället för x. Vi gör det tydligt genom att kalla variabeln för t. Maclaurinutveckling av $\cos t$ ger

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \mathcal{O}(t^4),$$

och genom att sätta in $t = 3x$ får vi

$$\cos(3x) = 1 - \frac{(3x)^2}{2} + \mathcal{O}((3x)^4) = 1 - \frac{9x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4).$$

(Notera att $\mathcal{O}((3x)^4) = \mathcal{O}(x^4)$ eftersom $(3x)^4 = 81x^4$ är en konstant gånger x^4, och konstanta funktioner är i högsta grad begränsade.)

Vi hanterar nämnaren på samma sätt: eftersom $x^2 \to 0$ då $x \to 0$ använder vi

$$\sin t = t + \mathcal{O}(t^3)$$

och sätter in $t = x^2$, vilket ger

$$\sin(x^2) = x^2 + \mathcal{O}((x^2)^3) = x^2 + \mathcal{O}(x^6).$$

Sammantaget har vi

$$\begin{aligned}\frac{\cos(3x)-1}{\sin(x^2)} &= \frac{1-\frac{9x^2}{2}+\mathcal{O}(x^4)-1}{x^2+\mathcal{O}(x^6)} = \frac{\frac{9x^2}{2}+\mathcal{O}(x^4)}{x^2+\mathcal{O}(x^6)} \\ &= \frac{\cancel{x^2}(\frac{9}{2}+\mathcal{O}(x^2))}{\cancel{x^2}(1+\mathcal{O}(x^4))} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{9}{2}\end{aligned}$$

så gränsvärdet är $\frac{9}{2}$.

b) Här är svårigheten att x inte går mot 0. Man kan dels använda taylorutveckling kring $x = 1$ istället för maclaurinutveckling, men man kan också byta variabel: genom att införa en ny variabel $t = x - 1$ får vi att $t \to 0$ då $x \to 1$. Då är alltså $x = t + 1$, så

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{(x-1)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(t+1)}{t^2}$$

och genom att använda maclaurinutvecklingen

$$\ln(t+1) = t - \frac{t^2}{2} + \mathcal{O}(t^3)$$

får vi

$$\frac{\ln(t+1)}{t^2} = \frac{t-\frac{t^2}{2}+\mathcal{O}(t^3)}{t^2} = \frac{\cancel{t}(1+\frac{t}{2}+\mathcal{O}(t^2))}{t^{\cancel{2}}} = \frac{1+\frac{t}{2}+\mathcal{O}(t^2)}{t}.$$

Här går täljaren mot 1 medan nämnaren går mot 0. Gränsvärdet existerar därför inte. (Högergränsvärdet är ∞ och vänstergränsvärdet är $-\infty$, så det går inte ens att säga att gränsvärdet är ∞.)

Anmärkning 2.15.19

En fråga som dyker upp är hur många termer man ska ta med i maclaurinutvecklingen innan man skriver feltermen (vare sig man använder notationen $x^n B(x)$ eller $\mathcal{O}(x^n)$ för feltermen). Det finns inget rakt svar på den frågan. Man brukar ta med ett par termer, och vägleds av vilka potenser av variabeln som förekommer runtomkring i uttrycket man behandlar. Det är säkrare att ta med fler termer än färre, eftersom de "överflödiga" termerna kommer att gå mot 0. Tar man med för få termer märker man ofta att man inte kan dra några slutsatser, och då kan man göra om beräkningen med fler termer.

Bevis av Taylors sats (Sats 2.44)

Detta bevis bygger på upprepad användning av Rolles sats, Sats 2.6[4]

Bevis i det allmänna fallet:

Punkterna a och x är alltså givna, och vi ska visa att

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{dvs} \quad \frac{f(x)-P_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}$$

för något s mellan a och x. Vi gör en första omformulering av detta: om vi kallar det reella talet $\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}$ för M, ska vi alltså *visa att*

$$M = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}$$

för något s mellan a och x. För att visa detta definierar vi en ny funktion i en variabel t enligt

$$g(t) = f(t) - P_n(t) - M \cdot (t-a)^{n+1}.$$

som är definierad för alla t mellan a och x. Anledningen till att den är intressant är följande: om vi deriverar den $n+1$ gånger får vi

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - 0 - (n+1)!M, \qquad (*)$$

eftersom

- då $P_n(t)$ deriveras $n+1$ gånger får man 0, eftersom det är ett polynom av grad högst n, och
- då $(t-a)^{n+1}$ deriveras $n+1$ gånger får man $(n+1)n\cdots 2\cdot 1(t-a)^0 = (n+1)!$.

[4]Beviset är anpassat från W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*. Tack till Isac Hedén för att ha uppmärksammat mig på det.

Vi kommer att visa att $g^{(n+1)}(s) = 0$ för något s mellan a och x. Om vi lyckas göra det, medför $(*)$ att vi visat att

$$f^{(n+1)}(s) - (n+1)!M = 0 \quad \text{dvs} \quad M = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!},$$

för något s mellan a och x, vilket var precis vad vi skulle visa.

Bevis av att $g^{(n+1)}(s) = 0$ för något s mellan a och x: Från Anmärkning 2.15.3 vet vi att

$$P_n(a) = f(a),\ P_n'(a) = f'(a),\ P_n''(a) = f''(a),\ \ldots,\ P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a),$$

så

$$g(a) = f(a) - P_n(a) - M(a-a)^{n+1} = f(a) - f(a) - 0 = 0,$$

och

$$g'(a) = f'(a) - P_n'(a) - M(n+1)(a-a)^n = f'(a) - f'(a) - 0 = 0,$$

och på liknande sätt kommer de n första derivatorna av g i punkten a, alltså $g'(a)$ till och med $g^{(n)}(a)$, att vara noll. Nu kommer den upprepade användningen av Rolles sats. Sätter vi $t = x$ i definitionen av g så får vi

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - P_n(x) - M(x-a)^{n+1} \\ &= f(x) - P_n(x) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\cancel{(x-a)^{n+1}}}\cancel{(x-a)^{n+1}} \\ &= f(x) - P_n(x) - (f(x) - P_n(x)) = 0. \end{aligned}$$

Så $g(x) = 0$, och vi vet att $g(a) = 0$. Rolles sats säger då att det finns en punkt s_1 mellan a och x där $g'(s_1) = 0$.

Så $g'(s_1) = 0$, och vi vet att $g'(a) = 0$. Rolles sats, tillämpad nu på g', säger då att det finns en punkt s_2 mellan a och s_1 där $g''(s_2) = 0$.

Vi upprepar detta n gånger. I det sista steget får vi en punkt s_n så att $g^{(n)}(s_n) = 0$, och vi vet att $g^{(n)}(a) = 0$. Rolles sats, tillämpad nu på $g^{(n)}$, säger då att det finns det en punkt s mellan a och s_n, och därför alltså mellan a och x, där $g^{(n+1)}(s) = 0$. Detta fullbordar beviset.

3 Talföljder och serier

Motivation

I slutet av det förra kapitlet använde vi taylorutvecklingar. Till exempel såg vi att

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}.$$

Detta är en avrundning, och vill man ha en exakt likhet måste man ta med feltermen, som är svår att hantera. I tillämpningar är man ofta nöjd med approximationer, så länge de är mycket precisa. En dator vet inte vad e^x betyder, men den kan addera och multiplicera (och därför också ta potenser), så högerledet är hanterbart för en dator. Approximationer med sådana summor av potenser av x är därför mycket användbara.

Det antyddes i det förra kapitlet att man kan få bättre och bättre approximationer ju fler termer man tar med. Är det verkligen så? Intuitivt borde det innebära att om vi aldrig avbryter utvecklingen får vi ett exakt värde:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots .$$

Men vad betyder det att addera oändligt många termer på detta sätt? Hur kan en summa av oändligt många termer vara ändlig, och hur kan vi använda dessa summor i beräkningar? Dessa frågor kommer vi att besvara i detta kapitel. För att kunna göra det behöver vi börja med grunderna för **talföljder** och **serier**.

3.1 Talföljder och deras konvergens

En **(oändlig) talföljd** är en uppräkning (dvs en lista) av reella tal med början men utan slut.

Exempel 3.1.1

a) Talföljden $1, 2, 3, 4, \ldots$.

b) Talföljden $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$.

c) Talföljden $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$.

d) Talföljden $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$.

e) Talföljden $\frac{3}{10}, \frac{3}{100}, \frac{3}{1000}, \ldots$, dvs $0.3, 0.03, 0.003, \ldots$.

f) Fibonaccis talföljd $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$.

I allmänhet betecknar man talföljden $a_1, a_2, a_3, \ldots$ med $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Talet a_n kallas för det $n$te elementet i följden, och skrivsättet $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ innebär att n numrerar elementen från $n = 1$ och framåt utan slut. Man kan förstås använda andra bokstäver än a och n, och n behöver inte börja från 1. Ofta skriver man talföljden bara som (a_n), särskilt när man inte vill specificera vilket tal som n börjar vid, och det är underförstått att talföljden är oändlig.

I exemplet ovan beskrev vi talföljden genom att ange så många inledande termer att det allmänna mönstret blir tydligt. Det bästa vore förstås att ha en allmän formel för a_n; det kan då vara en sluten formel (en funktion av n) eller en rekursiv formel (som beskriver den/de första elementen i följden, och därefter anger a_n i termer av föregående termer).

Exempel 3.1.2

a) Talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty} = 1, 2, 3, 4, \ldots$ ges av den slutna formeln $a_n = n$.

b) Talföljden $(b_n)_{n=1}^{\infty} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ ges av den slutna formeln $b_n = \frac{1}{n}$. (Alltså är $(b_n)_{n=1}^{\infty} = (\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$.)

c) Talföljden $(c_k) = 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$ ges av den slutna formeln $c_k = \frac{1}{k^2}$.

d) Talföljden $(d_n)_{n=1}^{\infty} = -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ ges av den slutna formeln $d_n = (-1)^n$.

e) Den slutna formeln $e_n = 3 \cdot 10^{-n}$ ger talföljden $(e_n) = \frac{3}{10}, \frac{3}{100}, \frac{3}{1000}, \ldots = 0.3, 0.03, 0.003, \ldots$.

f) Fibonaccis talföljd $(f_n)_{n=0}^{\infty} = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ ges rekursivt av $f_0 = 1$, $f_1 = 1$ och $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ för alla $n \geq 2$.

Vi kommer att studera talföljders beteende. Vissa egenskaper hos talföljder är särskilt viktiga och har naturliga namn.

Definition 3.1

En talföljd (a_n) sägs vara

- **begränsad nedåt** om det finns ett reellt tal m med $a_n \geq m$ för alla n,
- **begränsad uppåt** om det finns ett reellt tal M med $a_n \leq M$ för alla n,
- **begränsad** den både är begränsad uppåt och begränsad nedåt,
- **positiv** om $a_n \geq 0$ för alla n,
- **negativ** om $a_n \leq 0$ för alla n,
- **växande** om $a_{n+1} \geq a_n$ för alla n, och
- **avtagande** om $a_{n+1} \leq a_n$ för alla n.

Exempel 3.1.3

a) Talföljden $(2n)_{n=1}^{\infty} = 2, 4, 6, \ldots$ är begränsad nedåt då den är positiv, men inte begränsad uppåt. Den är växande.

b) Talföljden $0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, \ldots$ är växande. Den är även begränsad (både nedåt av t ex $m = 0.3$ och uppåt av t ex $M = 0.4$).

c) Talföljden $-1, 1, -1, 1, \ldots$ är begränsad, men varken positiv eller negativ och varken växande eller avtagande. Den är **alternerande**, dvs varannan term är strikt positiv och varannan strikt negativ.

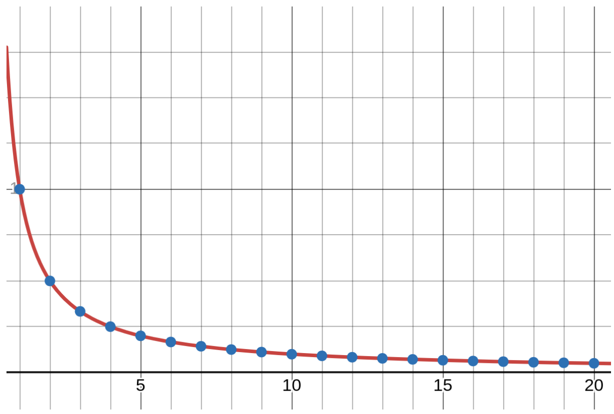
Låt oss titta närmare på dessa tre talföljder. Både $1, 2, 3, 4, \ldots$ och $0.3, 0.33, 0.333, \ldots.$ är alltså växande talföljder. Skillnaden är att medan den ena växer obegränsat, verkar den andra närma sig $\frac{1}{3}$. Talföljden $-1, 1, -1, 1, \ldots$ växer inte obegränsat, men närmar sig inte något värde. Detta sätter fingret på den fråga som kommer att vara viktigast för oss när det gäller talföljder: går talföljden mot något "gränsvärde", eller gör den inte det. Detta är innebörden av följande definition.

Definition 3.2

Vi säger att talföljden (a_n) **konvergerar** mot talet L om a_n kan fås godtyckligt nära L genom att ta n tillräckligt stort, dvs, mer formellt, om följande gäller: för varje $\varepsilon > 0$ finns det något positivt heltal N så att $|a_n - L| < \varepsilon$ för alla $n \geq N$.

Om (a_n) konvergerar mot L skriver man detta som $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Man säger även att talföljden **är konvergent**. Om talföljden inte konvergerar mot något L säger man att den **divergerar** eller **är divergent**.

Jämför definitionen av $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ med definitionen av $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ från Kapitel 1. Den enda skillnaden är att x är en reell variabel, medan n är ett heltal. I figuren nedan ser vi grafen till $f(x) = \frac{1}{x}$ och de första elementen i följden $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$. Dessa är alltså de punkter på kurvan vars x-koordinat är ett heltal. Vi vet redan att $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, eftersom $\frac{1}{x}$ kan fås godtyckligt nära noll genom att ta x tillräckligt stort. Därför gäller samma sak om vi bara tittar på heltalspunkterna, dvs $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$



Exempel 3.1.4

a) Talföljden $(2n)_{n=1}^{\infty} = 2, 4, 6, \ldots$ divergerar. Eftersom den växer obegränsat säger man att den divergerar mot oändligheten: $\lim_{n\to\infty} 2n = \infty$.

b) Talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty} = 0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, \ldots$ konvergerar mot $\frac{1}{3}$, eftersom $0.333\ldots$ är decimalapproximationen av $\frac{1}{3}$, så genom att ta tillräckligt många treor kommer man godtyckligt näras $\frac{1}{3}$.

c) Talföljden $-1, 1, -1, 1, \ldots$ är divergent: den närmar sig varken 1 eller -1 eller något annat reellt tal.

På samma sätt som gränsvärden för funktioner, kan gränsvärden för talföljder misslyckas att existera på olika sätt: en talföljd kan divergera mot ∞ (som i a) ovan) eller $-\infty$, eller divergera på något annat sätt (som i c) ovan).

För växande talföljder ser det enklare ut enligt följande.

Sats 3.3

En växande talföljd är antingen konvergent eller divergerar mot ∞.

Beviset är kort men innehåller en hård teoretisk kärna. Idén är att en växande talföljd inte kan "svänga", så om den inte växer obegränsat måste den närma sig en övre gräns som den då konvergerar mot.

Bevis: Antingen är talföljden (a_n) begränsad uppåt, eller så är den inte det. Om den inte är begränsad uppåt innebär detta att den växer bortom varje gräns, dvs divergerar mot ∞. Om den är begränsad uppåt så kan man visa att det finns en minsta övre gräns L. Detta innebär att $L \geq a_n$ för alla n, och det finns inget tal mindre än L med den egenskapen. [a] Eftersom talföljden är växande och L är den minsta övre gränsen, leder detta till att a_n kommer godtyckligt nära L då n är tillräckligt stort (annars kan vi hitta en ännu mindre övre gräns, vilket motsäger att L är minsta möjliga), och alltså konvergerar (a_n) mot L.

[a] Att en sådan minsta övre gräns finns är en egenskap hos de reella talen, vars bevis inte ingår i denna kurs: varje uppåt begränsad mängd av reella tal har en minsta övre gräns.

Gränsvärdena för talföljder beter sig på liknande sätt som gränsvärden för funktioner, enligt nedan.

Sats 3.4

Om (a_n) och (b_n) är två talföljder som konvergerar mot A respektive B, dvs $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ och $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, så gäller

a) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$,

b) $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$,

c) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

d) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$, om $B \neq 0$, och

e) om $a_n \leq b_n$ för alla $n \geq N$ för något N, så är $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$, dvs $A \leq B$.

Den sista punkten sätter fingret på något vi kommer att återkomma till.

Idé

Konvergens eller divergens beror bara på talföljdens beteende *från och med ett visst n*: huruvida en talföljd konvergerar, och vad den i så fall konvergerar mot, är oberoende av de första N termerna för vilket ändligt tal N som helst.

Exempelvis är talföljden (a_n) som ges av

$$a_n = \begin{cases} n & \text{om } 1 \leq n < 1000, \\ \frac{1}{n} & \text{om } n \geq 1000 \end{cases}$$

konvergent: den konvergerar mot 0 eftersom $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, och detta påverkas inte av vad de första 1000 termerna är.

Sats 3.5: Klämsatsen

Om (a_n) och (b_n) är två talföljder med $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$, och (c_n) är en talföljd som uppfyller $a_n \leq c_n \leq b_n$ från och med något n, så är $\lim_{n\to\infty} c_n = L$.

Dessa satser kan bevisas från den formella definitionen på samma sätt som motsvarande satser för gränsvärden av funktioner i Kapitel 1. Nu vet vi tillräckligt om talföljder för att kunna börja prata om oändliga serier.

3.2 Serier och deras konvergens

En **(oändlig) serie** är en summa av elementen i en oändlig talföljd. Det är alltså en summa av oändligt många termer.

Exempel 3.2.1

Både $1+2+3+4+5+\cdots$ och $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ är exempel på oändliga serier.

I allmänhet skriver man serien $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ med summanotation som

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Exempel 3.2.2

a) Serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k = 1+2+3+\cdots.$

b) Serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots.$

c) Serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots.$

d) Serien $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i = -1+1-1+\cdots.$

e) Serien
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} 3\cdot 10^{-k} &= 3\cdot 10^{-1} + 3\cdot 10^{-2} + 3\cdot 10^{-3} + \cdots \\ &= 0.3+0.03+0.003+\cdots.\end{aligned}$$

Givet en serie är huvudfrågan ifall serien har en ändlig summa eller inte. För att kunna analysera den frågan behöver vi definiera vad vi menar med summan av oändligt många termer. Vi använder att vi vet hur man adderar ändligt många termer.

Idé

För att närma oss summan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ betraktar vi de **ändliga delsummorna**

$$s_1 = a_1,$$

$$s_2 = a_1 + a_2,$$

$$s_2 = a_1 + a_2 + a_3,$$

och i allmänhet

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Vi illustrerar detta med ett exempel.

Exempel 3.2.3

Vi betraktar serien från del e) av förra exemplet. Detta är alltså summan av elementen i talföljden

$$(a_k) = 0.3, 0.03, 0.003, \ldots.$$

Vi beräknar delsummorna

$$s_1 = 0.3,$$

$$s_2 = 0.3 + 0.03 = 0.33,$$

$$s_2 = 0.3 + 0.03 + 0.003 = 0.333,$$

och i allmänhet

$$s_n = 0.3 + 0.03 + \cdots + 0.00\ldots03 = 0.33\ldots33$$

(I s_n är det alltså n treor i decimalutvecklingen.)

Dessa delsummor utgör alltså en ny talföljd $s_1, s_2, s_3, \ldots$. I detta fall blir det talföljden $0.3, 0.33, 0.333, \ldots$. I Exempel 3.1.4 såg vi att den konvergerar mot $\frac{1}{3}$. Med andra ord: ju fler termer vi tar med i delsumman, desto närmare kommer vi $\frac{1}{3}$, så att *följden av delsummor konvergerar mot* $\frac{1}{3}$. Det är därför rimligt att ta detta som definitionen av att den oändliga serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3 \cdot 10^{-k} = 0.3 + 0.03 + 0.003 + \cdots$$

har den ändliga summan $\frac{1}{3}$, dvs

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3 \cdot 10^{-k} = \frac{1}{3}.$$

Det vi gjorde i exemplet var alltså att betrakta talföljden s_n av delsummor, och konstatera att

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{3}.$$

Vi omvandlade alltså problemet med summan av serier till problemet med konvergens av talföljder, som vi redan lärt oss att lösa. Vi använder detta exempel som vägledning till definitionen av summan av en serie.

Definition 3.6

Vi säger att den oändliga serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **konvergerar** mot talet s, och skriver detta som $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$, om $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ (där följden (s_n) av delsummor definieras som $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$).

Om serien inte konvergerar mot något tal säger vi att den **divergerar**. Om $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ (eller $-\infty$) skriver vi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$ (respektive $-\infty$) och säger att serien divergerar mot ∞ (respektive $-\infty$).

Exempel 3.2.4

a) Serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} 7 = 7 + 7 + 7 + \cdots$$

divergerar mot ∞, eftersom den $n$te delsumman $s_n = 7n$, och $\lim_{n\to\infty} 7n = \infty$.

b) Serien
$$\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + \cdots$$
divergerar mot ∞, eftersom den $n$te delsumman s_n i alla fall är större än n, och $\lim_{n\to\infty} n = \infty$. (Man kan beräkna s_n exakt: det är summan av de n första positiva heltalen, vilket är lika med $\frac{n(n+1)}{2}$, som går mot ∞ då $n \to \infty$.

c) Serien
$$\sum_{k=1}^{\infty} -k = -1 - 2 - 3 - \cdots$$
divergerar mot $-\infty$ av samma anledning.

d) För att avgöra om serien
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = -1 + 1 - 1 + \cdots$$
konvergerar eller divergerar beräknar vi delsummorna. Vi får
$$s_1 = -1, \quad s_2 = -1 + 1 = 0, \quad s_3 = -1 + 1 - 1 = -1,$$
och i allmänhet är $s_n = -1$ om n är udda, och $s_n = 0$ om n är jämnt. Talföljden (s_n) ser alltså ut som $-1, 0, -1, 0, \ldots$ och är därför divergent. Serien är alltså divergent (men inte mot ∞ eller $-\infty$).

Vi ska nu mer systematiskt undersöka konvergensen hos olika typer av serier. En sådan typ är geometriska serier.

Geometriska serier

Definition 3.7

En **geometrisk serie** är en serie på formen
$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

där a och r är reella tal.

Med andra ord är en geometrisk serie en serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, där kvoten $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ mellan en term och föregående är konstant. Talet r i definitionen ovan är denna konstanta **kvot**, och talet a är helt enkelt den **första termen**.

För att avgöra när en geometrisk serie konvergerar använder vi ett trick för att få en formel för s_n. Vi tar

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1},$$

och multiplicerar med r och får

$$s_n r = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n.$$

Om vi nu subtraherar $s_n - s_n r$ kommer alla termer att ta ut varandra parvis, utom den första och den sista, dvs

$$s_n - s_n r = a - ar^n \iff (1-r)s_n = a(1-r^n).$$

Om $r \neq 1$ kan vi nu lösa ut s_n genom att dela med $r-1$, vilket ger

$$s_n = a\frac{1-r^n}{1-r}.$$

Om $r = 1$ får vi istället $s_n = a + a + \cdots + a = na$. Vi kan nu avgöra konvergensfrågan genom att låta $n \to \infty$. Detta ger oss följande.

Sats 3.8

Vi har

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \begin{cases} 0 & \text{om } a = 0 \\ \frac{1}{1-r} & \text{om } |r| < 1 \\ \infty & \text{om } r \geq 1 \text{ och } a > 0 \\ -\infty & \text{om } r \geq 1 \text{ och } a < 0 \\ \text{odef.} & \text{om } r \leq -1. \end{cases}$$

Sammanfattningsvis är alltså den geometriska serien konvergent om $a = 0$ eller $|r| < 1$, och divergent annars.

Bevis: Summan är per definition $\lim_{n\to\infty} s_n$. Vi tittar på detta gränsvärde i de olika fallen och använder våra beräkningar av s_n

ovan.

- Om $a = 0$ är alla termer i serien 0, så $s_n = 0$ och $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$.
- Om $|r| < 1$ har vi $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$, så
$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-r^n}{1-r} = a\frac{1-0}{1-r} = \frac{a}{1-r}.$$
- Om $r \geq 1$ har vi två fall: $r > 1$ eller $r = 1$. Om $r > 1$ har vi $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ medan $1 - r < 0$. I uttrycket
$$a\frac{1-r^n}{1-r}$$
har vi därför $1 - r^n \to -\infty$ och $\frac{1-r^n}{1-r} \to \infty$. Hela uttrycket går därför mot ∞ om $a > 0$ och mot $-\infty$ om $a < 0$.

  Om $r = 1$ har vi istället $s_n = na$. Då $n \to \infty$ går även detta mot ∞ om $a > 0$ och mot $-\infty$ om $a < 0$.
- Om $r \leq -1$ är $r^n \geq 1$ om n är jämnt och $r^n \leq -1$ om n är udda. Därför konvergerar inte $s_n = a\frac{1-r^n}{1-r}$ mot något tal om $a \neq 0$, så serien är divergent. (På grund av det alternerande tecknet divergerar serien varken mot ∞ eller mot $-\infty$.)

Exempel 3.2.5: Zenons paradox

Zenon från Elea (ca. 490-430 f. Kr.) ställde upp följande påstådda paradox:

> *ska du gå en sträcka, måste du först nå hälften av sträckan,*
> *och därefter hälften av den återstående sträckan,*
> *och därefter hälften av den återstående sträckan,*
> *och så vidare utan slut,*
> *och kommer därför aldrig fram.*

Argumentet är alltså att eftersom sträckan är en oändlig summa av delsträckor (var och en hälften så lång som den förra), kommer processen att pågå oändligt länge. Detta ter sig som en paradox eftersom vi ju kommer fram när vi ska någonstans. Felet består i antagandet att summan av en oändlig serie måste vara oändlig. Om vi tänker oss att sträckan är en längdenhet, är Zenons serie

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$$

vilket är en geometrisk serie $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$ med $a=\frac{1}{2}$ och $r=\frac{1}{2}$. Enligt satsen ovan är serien konvergent, och

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1,$$

så du kommer fram!

För geometriska serier kan vi alltså helt reda ut när en sådan serie är konvergent, och räkna ut vad den i så fall konvergerar mot. För andra typer av serier är det mycket svårt att få fram så precis information. Därför nöjer man sig med att avgöra *om* serien är konvergent eller divergent.

p-serier

En vanligt förekommande typ av serier är serier på formen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots,$$

där exponenten p är en reell konstant. Sådana serier kallas informellt därför för p-serier. I Exempel 3.2.2 såg vi bland annat fallet $p=1$, dvs serien

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$$

som kallas för den **harmoniska serien**; där såg vi även fallet $p=2$, dvs serien

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots.$$

Men p behöver inte vara ett heltal; $p=\frac{1}{2}$ ger t ex serien

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots.$$

Frågan är om dessa konvergerar eller inte. Svaret ges av följande sats.

Sats 3.9

Serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergerar om $p > 1$, och divergerar mot ∞ om $p \leq 1$.

Vi kommer att kunna bevisa satsen med hjälp av integraler längre fram.

Exempel 3.2.6

Den harmoniska serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

är alltså divergent (då den är en p-serie med $p = 1$), medan serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots .$$

är konvergent; det visar sig att den konvergerar mot $\frac{\pi^2}{6}$, men att beräkna detta ingår inte i denna kurs utan kräver *Fourieranalys*.

Allmänna konvergenskriterier

Givet en serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vill vi nu undersöka om den konvergerar eller divergerar. Vi kommer att uppnå detta genom olika test. Ett första nödvändigt villkor är att talföljden (a_n) konvergerar mot 0.

Sats 3.10

Om inte $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, så är serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Bevis: Vi skriver upp delsummorna

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

och

$$s_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}.$$

och noterar att $a_n = s_n - s_{n-1}$. Om serien är konvergent så går delsummorna mot något tal s, dvs

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \quad \text{och} \quad \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s.$$

Men detta innebär att

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - s_{n-1} = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

Om serien är konvergent måste alltså $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, vilket innebär att om inte $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ så är serien divergent.

Anmärkning 3.2.7: Varning!

Skilj på konvergensen av talföljden (a_n) och konvergensen av serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Att talföljden konvergerar betyder att a_n går mot något tal då $n \to \infty$. Att serien konvergerar betyder att summan $a_1 + \cdots + a_n$ går mot något tal då $n \to \infty$. Tänk t ex på talföljden $(a_n) = 1, 1, 1, \ldots$, där alla element är 1. Talföljden konvergerar mot 1, eftersom

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$

medan serien divergerar mot oändligheten, dvs

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty,$$

eftersom $s_n = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$, och $\lim_{n\to\infty} n = \infty$. Att serien är divergent följer också från satsen ovan, eftersom talföljden (a_n) inte konvergerar mot 0.

Exempel 3.2.8

Serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2 + \frac{1}{n}$$

är divergent, eftersom $\lim_{n\to\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2 \neq 0$.

Anmärkning 3.2.9

Observera att satsen bara ger en implikation, dvs om talföljden inte går mot noll så är serien divergent. Om talföljden däremot går mot 0 kan serien vara både konvergent och divergent. Exempelvis är $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent medan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent, trots att både $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ och $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

På samma sätt som för talföljder beror en series konvergens bara på hur serien beter sig när $n \to \infty$. Man kan alltså bortse från ändligt många termer i början. Vi formulerar detta mer precist.

Sats 3.11

Serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent om och endast om serien $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ är konvergent för något $N \geq 1$.

Skillnaden mellan de två serierna är nämligen den ändliga summan

$$a_1 + \cdots + a_{N-1},$$

så om en av serierna konvergerar så gör den andra det. Observera dock att om vi är intresserade av *vad* serien konvergerar mot, spelar det förstås en roll om vi räknar med de första termerna. Oftast kommer vi dock bara vara intresserade av *ifall* serien konvergerar, och då spelar startpunkten ingen roll.

Vi avslutar med en praktisk sats.

Sats 3.12

Om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är konvergenta med $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ och $k \in \mathbb{R}$ en konstant, så är

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = A - B, \quad \text{och} \quad \sum_{n=1}^{\infty} k a_n = kA.$$

Dessa serier är med andra ord också konvergenta.

Exempel 3.2.10

Serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2^n}$$

är konvergent, eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ är en konvergent p-serie ($p = 2 > 1$) och $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ är en konvergent geometrisk serie (kvoten är $\frac{1}{2} < 1$).

3.3 Konvergenstest för positiva serier

Vi börjar med att betrakta positiva serier, dvs serier $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ där $a_n \geq 0$ för alla n. Fördelen med sådana serier är att följden av delsummor (s_n) är växande. Enligt sats 3.3 är den därför antingen konvergent eller divergerar mot ∞. En direkt konsekvens av detta är följande.

Sats 3.13

En positiv serie är antingen konvergent eller divergerar mot ∞.

Tack vare sats 3.11 gäller detta även om $a_n \geq 0$ bara gäller från och med något $N \geq 1$.

Låt oss resonera intuitivt kring vad Anmärkning 3.2.9 säger. Skriver vi upp de första fem elementen i respektive talföljd i anmärkningen, ser vi att

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} &= 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5} \qquad \text{och} \\ \left(\tfrac{1}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty} &= 1, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{9}, \tfrac{1}{16}, \tfrac{1}{25}. \end{aligned}$$

dvs den andra talföljden går mot 0 mycket snabbare än den första talföljden. När vi summerar serierna måste vi summera fler och fler termer, och för att summan ska vara ändlig och väldefinierad måste alltså termerna bli “tillräckligt små tillräckligt snabbt”.

Idé

För att en positiv serie ska vara konvergent måste dess termer gå mot noll tillräckligt snabbt.

Hur avgör vi vad som är tillräckligt snabbt? Till vår hjälp har vi ett antal olika konvergenstest som vi nu kommer att gå igenom.

Jämförelsetest

Med hjälp av de två jämförelsetesten nedan kan man avgöra om en positiv serie är konvergent genom att jämföra med en känd serie (ofta en p-serie eller en geometrisk serie).

Sats 3.14: Jämförelsetest I

Antag att $0 \leq a_n \leq b_n$ från och med $n = N$.

a) Om $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerar, så konvergerar även $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) Om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerar mot ∞, så divergerar även $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mot ∞.

Bevis: Notera att de två påståendena är ekvivalenta, eftersom positiva serier antingen konvergerar eller divergerar mot oändligheten enligt Sats 3.13. Vi visar varianten i a). Låt s_n och S_n beteckna delsummorna i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ respektive $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, dvs

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n \quad \text{och} \quad S_n = b_1 + \cdots + b_n \ .$$

Talföljderna (s_n) och (S_n) är båda växande från och med $n = N$. Enligt antagandet konvergerar talföljden S_n. Eftersom $s_n \leq S_n$ från och med $n = N$, kan inte s_n divergera mot oändligheten. Då måste alltså talföljden (s_n) vara konvergent, vilket per definition betyder att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent.

Idé

För positiva serier gäller: att vara mindre än en konvergent serie tvingar en att konvergera, och att vara större än en serie som divergerar mot oändligheten tvingar en att divergera mot oändligheten.

Exempel 3.3.1

Är serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-1}{n^3+1}$ konvergent eller divergent?

Lösning. Vi kommer att avgöra detta genom att jämföra med en känd serie. För att få en idé om vilken typ av jämförelse vi vill göra ($\leq$ eller $\geq$), gör vi först ett intuitivt resonemang: när n är stort (vilket är det som spelar roll för konvergensen) så är $5n - 1 \approx 5n$ och $n^3 + 1 \approx n^3$, så

$$\frac{5n-1}{n^3+1} \approx \frac{5n}{n^3} = 5\frac{1}{n^2}.$$

Serien verkar alltså bete sig som den konvergenta serien $\sum 5\frac{1}{n^2}$. Det verkar alltså som att vår serie konvergerar. För att verifierar detta använder vi jämförelsetestet: för att visa att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-1}{n^3+1}$ är konvergent måste vi hitta en konvergent serie b_n sådan att $\frac{5n-1}{n^3+1} \leq b_n$. Vi beräknar

$$\frac{5n-1}{n^3+1} \leq \frac{5n}{n^3+1} \leq \frac{5n}{n^3} = 5\frac{1}{n^2}$$

och eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} 5\frac{1}{n^2}$ är konvergent, så är vår serie konvergent. (Att $\sum_{n=1}^{\infty} 5\frac{1}{n^2}$ följer från Sats 3.9 och 3.12: den är en multipel av en konvergent p-serie.)

Exempel 3.3.2

Serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$$

är divergent, eftersom $\dfrac{n+1}{n^2} \geq \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$, och $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ är den harmoniska serien, som är divergent.

Observera att jämförelsen måste vara åt rätt håll. Om vi vill avgöra ifall

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2}$$

är konvergent eller divergent, hjälper det inte att jämföra med $\frac{1}{n}$ eftersom $\frac{n-1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$. Att vara mindre än en divergent serie (eller större än en konvergent serie), säger ingenting: att ha ∞ som en övre gräns säger just ingenting.

För att hantera sådana serier finns det ett lite mer sofistikerat jämförelsetest nedan. Där är serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ den serie vi vill undersöka, och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är den kända serien vi jämför med.

Sats 3.15: Jämförlelsetest II

Om (a_n) och (b_n) är två positiva talföljder, sätter vi

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n},$$

som antingen är ett reellt tal $L \geq 0$ eller ∞.

a) Om $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerar och $L \neq \infty$, så konvergerar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) Om $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergerar mot ∞ och $L \neq 0$, så divergerar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mot ∞.

Istället för att gå igenom beviset resonerar vi kring satsens idé.

Idé

Gränsvärdet L beskriver hur a_n är relaterat till b_n då $n \to \infty$. Om $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är konvergent $L < \infty$, betyder det att $a_n \approx L b_n$, dvs beter sig som en ändlig faktor gånger b_n, för stora n, så $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar också. Om $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är divergent och $L > 0$ (ändligt eller oändligt), betyder det att a_n inte är försumbart i förhållande till b_n, så a_n håller jämna steg med b_n och $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerar också.

Exempel 3.3.3

Vi kan nu hantera serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2}$ genom att jämföra den med serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$: vi sätter

$$a_n = \frac{n-1}{n^2} \quad \text{och} \quad b_n = \frac{1}{n}$$

och beräknar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n-1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}(1-\frac{1}{n})}{\cancel{n^2}} = 1.$$

Eftersom $1 > 0$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är divergent, följer det från jämförelsetestet att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är divergent.

Även detta test kan misslyckas.

Exempel 3.3.4

Antag att vi vill avgöra om serien $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ är konvergent eller divergent, genom att jämföra med en p-serie. (Att vi börjar med $n = 3$ påverkar inte konvergensen.) Vi börjar med att jämföra med den divergenta serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Vi sätter $a_n = \frac{1}{n \ln n}$ och $b_n = \frac{1}{n}$. Då är

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n \ln n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$$

(eftersom $\ln n \to \infty$). Gränsvärdet blev alltså 0 vid jämförelse med en divergent serie, och vi kan därför inte dra någon slutsats utifrån testet: serien kan vara konvergent, eller divergera långsammare än $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Om vi istället provar $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ får vi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\ln n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n} = \infty$$

(vilket följer från standardgränsvärdet $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$). Gränsvärdet blev alltså ∞ vid jämförelse med den konvergenta serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, och testet säger inget om detta nu heller: serien kan vara divergent, eller konvergera långsammare än $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Samma sak skulle hända om vi jämförde med $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ med något $1 < p < 2$: vi hamnar alltid i ett fall då testet inte kan tillämpas.

För att faktiskt avgöra om vår serie konvergerar eller divergerar behöver vi använda integraler; vi återkommer till detta i slutet av integralavsnittet.

Kvottest och rottest

Två konvergenstest som inte kräver jämförelse med någon annan serie är kvottestet och rottestet.

Sats 3.16: Kvottest

Om (a_n) är en positiv talföljd, sätter vi

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

- Om $0 \le L < 1$ är serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.
- Om $1 < L \le \infty$ är serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent mot ∞.
- Om $L = 1$ kan ingen slutsats dras.

Sats 3.17: Rottest

Om (a_n) är en positiv talföljd, sätter vi

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

- Om $0 \le L < 1$ är serien $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.
- Om $1 < L \le \infty$ är serien $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent mot ∞.
- Om $L = 1$ kan ingen slutsats dras.

Anmärkning 3.3.5

Notera att villkoren på L är desamma i båda satserna. I båda satserna gäller vidare att om $1 < L \le \infty$, dvs antingen ett reellt tal större än 1 eller oändligheten, så går termerna inte mot 0, vilket då enligt Sats 3.10 gör att serien divergerar.

Båda satserna kan ses som en generalisering av konvergensvillkoret för en geometrisk serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$. Kvottestet kommer att vara mer användbart för oss. Låt oss titta närmare på vad kvottestet säger om geometriska serier. Om $a_n = ar^{n-1}$ med $a \neq 0$ får vi nämligen

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^n}{ar^{n-1}} = r$$

så $L = \lim\limits_{n\to\infty} r = r$, och kvottestet är överens med Sats 3.8 om konvergens då $0 \le L < 1$ och divergens då $L > 1$. För $L = 1$ är just den geometriska serien divergent, men för mer allmänna serier kan man inte säga något utifrån kvottestet. Idén med kvottestet för allmänna positiva serier kan sammanfattas som följer.

Idé

Gränsvärdet L i kvottestet är ett slags asymptotisk version av kvoten $r = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ i en geometrisk serie: eftersom denna kvot inte är konstant om serien inte är geometrisk, använder man gränsvärdet för att bedöma seriens beteende mot oändligheten.

Exempel 3.3.6

Avgör om serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ är konvergent eller divergent.

Lösning. Vi använder kvottestet med $a_n = \frac{2^n}{n!}$. Då är

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}/(n+1)!}{2^n/n!} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \frac{n!}{(n+1)!}.$$

Det första bråket förkortas till 2 enligt potenslagar, och det andra förkortas till $\frac{1}{n+1}$, eftersom

$$(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot (n+1) = n! \cdot (n+1).$$

Alltså är

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0.$$

Eftersom $L < 1$ ger kvottestet att serien är konvergent.

Notera hur potenser och fakulteter kunde förenklas i exemplet ovan. Detta gör kvottestet särskilt användbart för serier $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ där termerna har n i en exponent eller en fakultet. Det kan tyckas specifikt, men kom ihåg att vår motivation till att studera serier kom ifrån att vi ville kunna säga sådant som att

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{x!}$$

är lika med e^x. Sådana så kallade potensserier återkommer vi till inom kort.

Exempel 3.3.7

Vad säger kvottestet om konvergensen av p-serier? Om vi betraktar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ (där alltså p är konstant) har vi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^p}{n^p} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^p = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1^p = 1.$$

Alltså är

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

och ingen slutsats kan dras. (Kom ihåg att vi redan vet att serien konvergerar om och endast om $p > 1$.) Man kan tolka det som att p-serier konvergerar eller divergerar för långsamt för att kvottestet ska kunna detektera detta.

3.4 Absolut och villkorlig konvergens

I det förra avsnittet undersökte vi konvergensen av positiva serier. Vi ska nu titta på mer allmänna serier, dvs serier där inte alla termer måste vara positiva. Då finns det två relevanta konvergensbegrepp, absolut och villkorlig konvergens. Vi börjar med absolutkonvergens, som helt enkelt går ut på att bortse från termernas tecken.

Definition 3.18

Vi säger att serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är **absolutkonvergent** om serien $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ är konvergent.

Exempel 3.4.1

a) Serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \frac{1}{25} + \cdots$$

är absolutkonvergent, eftersom serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots$$

är konvergent (då det är en p-serie med $p > 1$).

b) Serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots$$

är inte absolutkonvergent, eftersom serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

är divergent (då det är en p-serie med $p \leq 1$).

Absolutkonvergens är alltså konvergensen av serien $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Eftersom denna serie är positiv, kan vi alltså använda våra metoder från förra avsnittet. Men vi är egentligen intresserade konvergensen av serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ och inte $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Följande sats kopplar samman de båda begreppen.

Sats 3.19

Om $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ är konvergent, så är $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Med andra ord: om en serie är absolutkonvergent, så är den konvergent.

Bevis: Vi antar att $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergerar mot något $A \in \mathbb{R}$ och måste visa att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent.

Som ett mellanled sätter vi

$$b_n = a_n + |a_n|,$$

så $b_n = 2a_n$ om $a_n \geq 0$ och $b_n = 0$ om $a_n < 0$. Detta innebär att

$$0 \leq b_n \leq 2|a_n|$$

för alla n. Notera att serien $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ konvergerar mot $2A$ enligt Sats 3.12. Jämförelsetest 1 medför då att $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerar mot något $B \in \mathbb{R}$.

Vi vet nu alltså att $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ och att $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = A$. Eftersom $a_n = b_n - |a_n|$ ger sats 3.12 att

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - |a_n|) = B - A,$$

dvs $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent, vilket skulle visas.

Exempel 3.4.2

Serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ är konvergent eftersom den är absolutkonvergent enligt Exempel 3.4.1.

Satsen säger alltså att om en serie är absolutkonvergent, så är den konvergent. Som vi kommer att se gäller *inte* det omvända, dvs det finns serier som är konvergenta trots att de inte är absolutkonvergenta. Detta fenomen har ett speciellt namn.

Definition 3.20

Vi säger att serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är **villkorligt konvergent** eller **betingat konvergent** om den är konvergent men inte absolutkonvergent, dvs om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent men $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ är divergent.

Absolutkonvergens är alltså ett starkare villkor än konvergens. Om en serie inte är absolutkonvergent kan den antingen vara divergent eller villkorligt konvergent. I allmänhet är detta svårt att avgöra, men för alternerande serier (serier där varannan term är positiv och varannan är negativ) finns det ett särskilt test.

Sats 3.21: Leibniztest för alternerande serier

Om talföljden (a_n) uppfyller följande tre villkor

- den är alternerande, dvs varannan term är (strikt) positiv och varannan term är (strikt) negativ, för alla $n \geq N$ för något N,
- den avtar i absolutbelopp, dvs $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ för alla $n \geq N$,
- den går mot 0, dvs $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

så är serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

Exempel 3.4.3

Vi tillämpar Leibniztestet på serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ från Exempel 3.4.1.

Talföljden $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$

- är alternerande, eftersom nämnaren är positiv och $(-1)^n$ är alternerande positivt och negativt,
- avtar i absolutbelopp, eftersom
$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right|$$
för alla $n \geq N$,
- går mot 0, dvs $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Enligt Leibniztestet är serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergent. Vi såg i Exempel 3.4.1 att den inte är absolutkonvergent, så den är därför villkorligt konvergent.

Anmärkning 3.4.4

Om vi tillämpar Leibniztestet på serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ så kommer vi på samma sätt att se att den också är konvergent. (Gör gärna detta som övning.) Detta visste vi dock redan tidigare, eftersom serien är absolutkonvergent.

Om serien inte uppfyller alla tre kraven i Leibniztestet kan vi inte avgöra om den är konvergent eller inte.

Vi avslutar med en grov sammanfattning av skillnaden mellan absolut och villkorlig konvergens.

Idé

Att en serie är absolutkonvergent innebär att den konvergerar på grund av att termernas storlek (absolutbelopp) går mot noll tillräckligt snabbt. Detta är en starkare form av konvergens då den är oberoende av termernas tecken; om en serie är absolutkonvergent så är den konvergent. Om en serie inte är absolutkonvergent kan den ändå vara konvergent. Konvergensen är då svag i den meningen att termernas storlek inte går mot noll tillräckligt snabbt, men termernas olika tecken gör att de delvis tar ut varandra så att serien konvergerar. Denna svagare form av konvergens kallas för villkorlig konvergens.

3.5 Potensserier

Vi har nu tillräckligt med verktyg för att hantera den typ av serier som motiverade våra studier: potensserier.

Definition 3.22

En **potensserie i en variabel** x är en serie på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots$$

där c och $a_0, a_1, \ldots$ är reella konstanter.

Att serien börjar med $n = 0$ är inte nödvändigt, men vanligt. Seriens nollte term är alltså konstanten a_0, medan termerna med $n > 0$ är funktioner av variabeln x. Man säger att serien är centrerad i c, och konstanten c kallas för seriens **konvergenscentrum**. Vi kommer strax att se varför den kallas så.

Exempel 3.5.1

a) Serien $\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-2)^n$ är en potensserie centrerad i 2.

b) Serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

är den potensserie som vi mötte i inledningen av detta kapitel.

c) Serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n2^n}$ är en potensserie centrerad i 5.

Eftersom x är en variabel kommer konvergensen av $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ att bero på x: serien kan vara konvergent för vissa värden på x och divergent för andra. Där den är konvergent kan den sedan vara absolutkonvergent eller villkorligt konvergent. Vi illustrerar detta med Exempel c) ovan.

Exempel 3.5.2

För vilka värden på x är serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n2^n}$ absolutkonvergent, villkorligt konvergent respektive divergent?

Lösning. Vi börjar med att undersöka absolutkonvergens, dvs för vilka $x \in \mathbb{R}$ serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(x-5)^n}{n2^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x-5|^n}{n2^n}$$

konvergerar. (Notera att både n och 2^n är positiva.) Närvaron av potenser gör att det är lämpligt att använda kvottestet. Vi beräknar

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{|x-5|^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \Big/ \frac{|x-5|^n}{n2^n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n2^n|x-5|^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}|x-5|^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \frac{|x-5|}{2} = \frac{|x-5|}{2},
\end{aligned}$$

eftersom $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Enligt kvottestet är detta konvergent om

$$\frac{|x-5|}{2} < 1 \iff |x-5| < 2 \iff 3 < x < 7$$

och divergent om

$$\frac{|x-5|}{2} > 1 \iff |x-5| > 2 \iff x < 3 \text{ eller } x > 7\ .$$

Eftersom vi tagit absolutbelopp innebär detta att vår ursprungliga serie är absolutkonvergent då $3 < x < 7$. När $x < 3$ eller $x > 7$ går termerna inte mot 0, enligt anmärkning 3.3.5, så serien är divergent då.

Gränsfallen $x = 3$ och $x = 7$ måste undersökas närmare. Då $x = 7$ får vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(7-5)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

som är divergent (p-serie med $p \leq 1$). Då $x = 3$ får vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-5)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

som är villkorligt konvergent enligt Exempel 3.4.3.

Slutsats Potensserien $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-5)^n}{n2^n}$ är

- absolutkonvergent då $3 < x < 7$,
- villkorligt konvergent då $x = 3$, och
- divergent då $x < 3$ eller $x \geq 7$.

Vi såg alltså att serien konvergerade inom ett intervall centrerat kring konvergenccentrumet $x = 5$, och divergerade utanför detta intervall. I intervallets gränser var vi tvungna att undersöka närmare vad som hände. Detta är ett typiskt beteende hos potensserier. Följande sats ger hela bilden.

Sats 3.23

För serien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ gäller ett av följande tre påståenden:

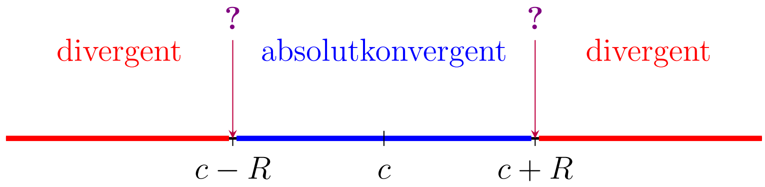
1.) Serien är konvergent för alla $x \in \mathbb{R}$.

2.) Serien är konvergent för $x = c$ och divergent för alla $x \neq c$.

3.) serien är konvergent då $|x-c| < R$, divergent då $|x-c| > R$, och divergent eller konvergent då $|x-c| = R$, för något reellt tal $R > 0$.

När serien är konvergent så är den absolutkonvergent utom möjligen då $|x-c| = R$ i fall 3.

Talet R i fall 3 kallas för seriens **konvergensradie**. Fall 3 sammanfattas av följande bild.



Inom avstånd R från c är alltså serien absolutkonvergent, och därutanför är den divergent. Detta förklarar varför c kallas för konvergenscentrum. I randpunkterna $x = c \pm R$ säger satsen inget, utan serien kan vara divergent, villkorligt konvergent eller absolutkonvergent; dessa punkter måste undersökas separat, vilket frågetecknen antyder.

Exempel 3.5.3

Vi ser att serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n 2^n}$ i Exempel 3.5.2 faller under fall 3 ovan, med $c = 5$ och $R = 2$. Vi såg nämligen att serien är absolutkonvergent då $|x - 5| < 2$, dvs $3 < x < 7$, och divergent då $|x - 5| > 2$, dvs $x < 3$ eller $x > 3$. Vår separata undersökning randpunkterna där $|x - 5| = 2$, dvs i punkterna $x = 3$ och $x = 7$,

Exempel 3.5.4

För vilka värden på x är serien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ absolutkonvergent, villkorligt konvergent respektive divergent?

Lösning. (Vi såg alltså i Exempel 3.3.6 att $x = 2$ ger en konvergent serie.) Vi undersöker absolutkonvergens med hjälp av kvottestet och får, med beräkningar som påminner om Exempel 3.3.6, att

$$\frac{\left|\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\dfrac{x^n}{(n)!}\right|} = \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{|x|}{n+1}.$$

När $n \to \infty$ går alltså detta mot 0 oavsett vilket värde x har. (Notera att det inte är x, utan n, som går mot ∞.) Eftersom $0 < 1$

ger kvottestet att serien är absolutkonvergent för alla värden på x. (Detta är alltså ett exempel på fall 1 i satsen ovan.)

Exempel 3.5.5

För vilka värden på x är serien $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ absolutkonvergent, villkorligt konvergent respektive divergent?

Lösning. Notera att $n^n x^n = (nx)^n$. För varje specifikt $x \neq 0$ kommer detta att gå mot ∞ då $n \to \infty$. Termerna går alltså inte mot 0, och serien är divergent. När $x = 0$ är alla termer i serien 0, och serien är då (absolut)konvergent. Serien är alltså divergent för alla $x \in \mathbb{R}$ förutom konvergenscentrum $x = 0$. (Detta är alltså ett exempel på fall 2 i satsen ovan.)

Sammanfattningsvis kan man säga att fall 1 svarar mot $R = \infty$ och fall 2 mot $R = 0$. Fall 3 är då ett mellanting mellan de två extremerna, där $0 < R < \infty$.

Anmärkning 3.5.6

För de x där potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ är konvergent, så konvergerar alltså serien mot ett reellt tal som varierar som funktion av x. Med andra ord innebär detta att $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = f(x)$, en funktion av x. Denna funktion kan ibland vara välbekant: exempelvis kommer vi att se längre fram att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

När en potensserie konvergerar kan vi alltså behandla den som en funktion av x. Man kan då t ex fråga sig om denna funktion är deriverbar och vad derivatan i så fall är. Svaret ges av följande sats.

Sats 3.24

Om serien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ är konvergent i ett intervall $(c-R, c+R)$

för något $R > 0$, dvs om

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = f(x)$$

för alla x med $c - R < x < c + R$, så är funktionen f deriverbar på detta intervall, och

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1}.$$

Notera att derivatan av $(x-c)^n$ är precis $n(x-c)^{n-1}$ om $n > 0$, så det satsen säger är att man deriverar serien term för term och adderar. (Den nollte termen är en konstant vars derivata är 0.) Vi vet redan att derivatan beter sig väl med avseende på ändliga summor, dvs att

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{N} a_n(x-c)^n\right) = \sum_{n=1}^{N} na_n(x-c)^{n-1},$$

så för att bevisa satsen måste man visa att denna likhet fortsätter att gälla när vi låter $N \to \infty$. Vi gör inte detta i detalj.

Exempel 3.5.7

a) Vi såg att serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n2^n}$ är konvergent på intervallet $(3, 7)$. Därför är den deriverbar på det intervallet. Skriver vi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n2^n}$$

så gäller

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-5)^{n-1}}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{n-1}}{2^n}$$

för alla x med $3 < x < 7$. Vi kan derivera detta igen på samma sätt och få

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)(x-5)^{n-2}}{2^n}$$

för alla x med $3 < x < 7$. (Notera hur satsen medför att denna potensserie börjar med $n = 2$, ett steg högre än i förstaderivatan.) Detta kan upprepas för att beräkna högre ordningens derivator.

b) Vi såg att serien $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ är konvergent överallt, dvs på intervallet $(-R, R)$ oavsett vad $R > 0$ är. Funktionen

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

är alltså deriverbar överallt, och

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

vilket ju exakt är $g(x)$. Att $g'(x) = g(x)$ har sin förklaring i att $g(x) = e^x$, som vi strax kommer att se.

3.6 Taylorserier

I det förra avsnittet utgick vi från en potensserie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ och avgjorde var den konvergerade mot en funktion $f(x)$. I detta avsnitt ska vi göra det omvända: utgå från en funktion och representera den av en serie.

Definition 3.25

Om en funktion $f(x)$ ges av $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ på ett intervall $(c-R, c+R)$, säger vi att funktionen f **representeras av serien** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ på det intervallet.

Att $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ betyder alltså att serien konvergerar mot $f(x)$.

Idé

Givet en funktion f sådan att f och alla dess derivator $f', f'', f''', \ldots$ är definierade på ett visst intervall $(c-R, c+R)$, vill vi hitta en serierepresentation av f, dvs en potensserie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ som konvergerar mot $f(x)$ på det intervallet. För att göra det behöver vi beräkna $a_0, a_1, \ldots$.

Anmärkning 3.6.1

En anledning att göra detta är att det ger oss möjlighet att beräkna funktionens värden med så hög precision vi vill. Även om vi har en formel för $f(x)$, t ex $f(x) = \sin x$, är det oklart för en dator vad t ex $\sin 20$ är och hur det beräknas. Däremot kan datorer addera och multiplicera tal effektivt. Om vi lyckas skriva $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ kan datorn enkelt räkna ut summan av de första N termerna i serien (där N kan vara ett stort tal). Att serien konvergerar mot $\sin x$ innebär just att för varje precision vi söker kan vi välja N tillräckligt stort för att få en approximation med den precisionen. Om detta påminner dig om resonemanget med taylorutveckling så kommer vi strax att se att det inte är någon slump.

Låt oss anta att $f(x)$ representeras av serien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ på intervallet $(c-R, c+R)$, och att $f, f', f'', \ldots$ alla är definierade där. Vi vill ta reda på vad $a_0, a_1, \ldots$ måste vara. Om

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$$

kan vi sätta in $x = c$ och få

$$f(c) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(c-c)^n = a_0 + a_1\cancel{(c-c)} + a_2\cancel{(c-c)^2} + a_3\cancel{(c-c)^3} + \cdots$$

så vi får $a_0 = f(c)$. Sedan deriverar vi. Sats 3.24 ger

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-c)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \cdots$$

och sätter vi in $x = c$ får vi

$$f'(c) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(c-c)^{n-1} = a_1 + 2a_2\cancel{(c-c)} + 3a_3\cancel{(c-c)^2} + \cdots$$

så $a_1 = f'(c)$. Deriverar vi igen ger Sats 3.24 att

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)na_n(x-c)^{n-2} = 2a_2 + 2\cdot 3a_3(x-c) + \cdots$$

och sätter vi in $x = c$ får vi nu att $f''(c) = 2a_2$, dvs $a_2 = \dfrac{f''(c)}{2}$. Upprepar vi deriveringen och insättningen av $x = c$ får vi

$$f'''(c) = 2\cdot 3a_3, \quad f^{(4)}(c) = 2\cdot 3\cdot 4a_4, \quad \ldots \quad f^{(n)}(c) = n!a_n, \quad \ldots. \,,$$

så i allmänhet är $a_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$. Vi har nu kommit fram till följande: om $f(x)$ representeras av serien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ på något intervall, så måste $a_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$. Serien är alltså

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f''(c)}{3!}(x-c)^3 + \cdots$$

som är den "oändliga taylorutveckling" vi sökte i inledningen av detta kapitel. Vi har nått vårt mål, och följande definition ger serien ett lämpligt namn.

Definition 3.26

Om $f(x), f'(x), f''(x), \ldots$ är definierade på ett intervall kring $x = c$, kallar vi serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

för **taylorserien till** f **kring** c. Om $c = 0$ kallas serien även för **maclaurinserien till** f.

Anmärkning 3.6.2

Notera att taylorserien kan vara konvergent överallt, konvergent på ett intervall eller divergent överallt utom i $x = c$. Det kan faktiskt också hända att den konvergerar mot något annat än $f(x)$. Det enda vi har kommit fram till är att om en potensserie konvergerar mot $f(x)$ på ett intervall, så måste det vara taylorserien till f.

Exempel 3.6.3

Låt oss bestämma maclaurinserien till $f(x) = e^x$. Vi har $f'(x) = f''(x) = \cdots = e^x$, så

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = e^0 = 1,$$

vilket ger maclaurinserien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

Vi såg i Exempel 3.5.4 att denna serie är absolutkonvergent överallt.

Anmärkning 3.6.4

För att verifiera att serien i det förra exemplet faktiskt konvergerar mot just e^x, och inte mot någon annan funktion, måste vi visa att delsummorna går mot e^x, dvs att

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \right) = e^x.$$

Detta kräver ett teoretiskt resonemang, vilket vi göra med de kunskaper vi har. Summan

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^N}{N!}$$

är inget annat än maclaurinpolynomet $P_N(x)$ av ordning N till e^x. Enligt Taylors sats är

$$P_N(x) = e^x - E_N(x)$$

där $E_N(x)$ är feltermen som uppfyller

$$E_N(x) = f^{(N+1)}(s)\frac{x^{N+1}}{(N+1)!} = e^s\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}$$

för något s mellan 0 och x. Alltså gäller

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{x^n}{n!}\right) &= \lim_{N\to\infty} P_N \\
&= \lim_{N\to\infty}\left(e^x - E_N\right) \\
&= \lim_{N\to\infty}\left(e^x - e^s\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}\right) = e^x,
\end{aligned}$$

där den sista likheten beror på att bråket går mot 0 för varje givet x. Alltså konvergerar serien mot e^x överallt.

Maclaurinserierna till några viktiga funktioner kan vi få från Sats 2.45. Exempelvis har $\ln(x+1)$ maclaurinserien $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$. Vi avgör var denna serie konvergerar.

Exempel 3.6.5

För att avgöra var serien $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ är konvergent, använder vi kvottestet för att avgöra var serien är absolutkonvergent. Vi har

$$\frac{\left|(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|}{\left|(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right|} = \frac{n|x|^{n+1}}{(n+1)|x|^n} = \frac{n}{n+1}|x|,$$

och när $n\to\infty$ går $\frac{n}{n+1}\to 1$, så $\frac{n}{n+1}|x|\to|x|$. Kvottestet säger alltså att serien är absolutkonvergent då $|x|<1$ och inte absolutkonvergent då $|x|>1$. Enligt Sats 3.23 är konvergensradien 1, så serien är absolutkonvergent då $|x|<1$ och divergent då $|x|>1$. Om vi undersöker punkterna $x=\pm1$ separat får vi att serien är villkorligt konvergent då $x=1$ och divergent då $x=-1$; vi lämnar detta som övning.

Maclaurinserien är alltså konvergent på intervallet $(-1,1]$ och divergent annars. För funktionen $\ln(x+1)$ betyder detta att *utanför det intervallet hjälper det inte att ta fler termer i maclaurinutvecklingen, eftersom summorna inte närmar sig funktionsvärdet.* (Detta är mest intressant då $x > 1$, eftersom funktionen inte är definierad då $x \leq -1$.)

Vi avslutar med följande sats, som bygger på Sats 2.45, och talar om på vilket intervall maclaurinserierna till våra vanliga funktioner konvergerar mot respektive funktion.

Sats 3.27

Följande gäller på respektive intervall

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots && \text{på } \mathbb{R} \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots && \text{på } \mathbb{R}, \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots && \text{på } \mathbb{R}, \\
\ln(x+1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots && \text{på } (-1, 1], \\
\arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots && \text{på } [-1, 1],
\end{aligned}$$

och

$$(x+1)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \qquad \text{på } (-1, 1).$$

Beviset för e^x har vi sett i anmärkningen ovan, och de andra påståendena kan visas på liknande sätt.

4 Integration

4.1 Idé: arean under grafen

När vi deriverar en funktion får vi ut funktionens förändringshastighet i en viss punkt. Detta är *lokal* information, som beskriver hur funktionen beter sig i ett visst ögonblick. Vi vill nu göra det motsatta: vi vill veta hur mycket som en funktion *ackumulerat (globalt)* under ett intervall, givet funktionens förändringshastighet i varje ögonblick. Vi illustrerar denna idé med ett exempel.

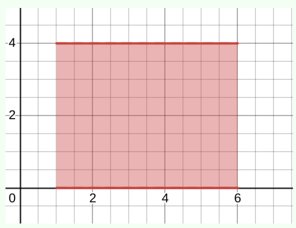
Exempel 4.1.1

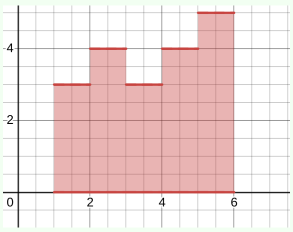
En partikel färdas med hastigheten $v(t)$ längs en linje. Den startar vid tiden $t = a$. Hur långt har den färdats vid tiden $t = b$?

Vi söker alltså den sammanlagda (ackumulerade) sträckan Δs som partikeln färdats under tiden $\Delta t = b - a$. För att svara på den frågan måste vi veta $v(t)$. Om $v(t)$ är konstant, säg v, vet vi från skolan att sträckan är hastigheten gånger tiden, dvs

$$\Delta s = v\Delta t = v(b - a).$$

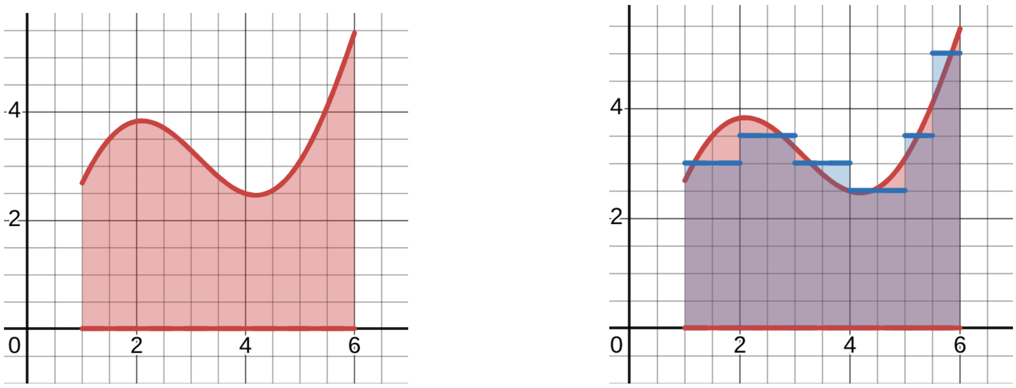
Geometriskt är detta arean hos en rektangel med bas $b - a$ och höjd v. Vi kan illustrera detta grafiskt: om vi ritar grafen till $y = v(t)$, är detta arean under grafen, ovanför t-axeln, mellan $t = a$ och $t = b$. Detta illustreras av figuren till höger.





Om hastigheten inte är konstant över hela tidsintervallet, blir det något svårare. Fallet då hastigheten är styckvis konstant, dvs konstant över kortare delintervall, illustreras här. På varje sådant delintervall är sträckan lika med motsvarande rektangels area, och den totala sträckan är summan av dessa areor. Detta kan vi i princip göra hur korta delintervallen än är.

I exemplet gavs alltså den ackumulerade sträckan av arean under grafen av en (styckvis) konstant funktion. Frågan är hur vi hanterar detta för allmänna kontinuerliga funktioner, som den i figuren nedan till vänster. Exemplet ger oss följande idé.



Idé

Vi vill definiera och bestämma arean av området under kurvan $y = f(x)$ och ovanför x-axeln, och mellan $x = a$ och $x = b$. Vi gör detta genom att dela upp intervallet $[a, b]$ i korta delintervall, och på varje delintervall formar vi en rektangel som i figuren ovan till höger, där höjden ges av funktionsvärdet i någon punkt på delintervallet. Detta ger oss en union av rektanglar. En sådan union av rektanglar ger en approximation av det ursprungliga området, som är bättre ju fler och ju kortare delintervallen är. Summan av rektanglarnas areor ger oss en approximation av arean, och vi bestämmer arean genom att ta gränsvärdet då antalet delintervall går mot ∞ och deras bredd mot 0.

Det finns flera fördelar med detta sätt att definiera och studera arean:

- Det är enkelt att räkna ut arean av rektanglar.
- Vi kan beräkna gränsvärdet för att få ett exakt värde, om det existerar.
- Om vi vill göra en numerisk approximation räcker det att ta tillräckligt många, tillräckligt korta delintervall, utan att ta gränsvärdet.

- I exemplet med hastigheten är det tydligare varför arean faktiskt är den ackumulerade sträckan, då detta gäller i det styckvis konstanta fallet. Så är det i många andra tillämpningar.

Vi kommer att definiera **integralen** av en funktion på detta sätt, koppla den till derivator genom begreppet *primitiv funktion*, och gå igenom olika metoder för att beräkna integraler.

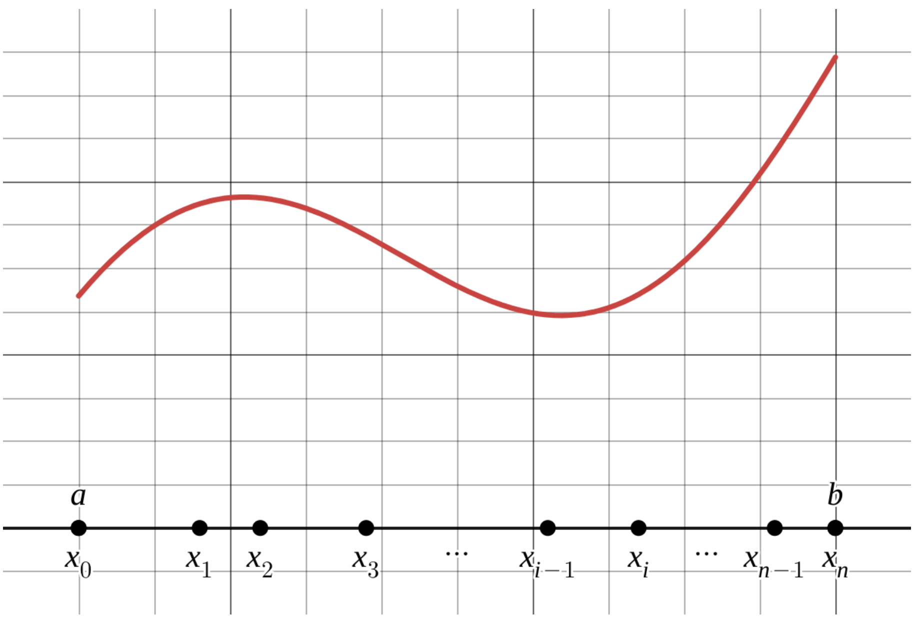
4.2 Integralens definition

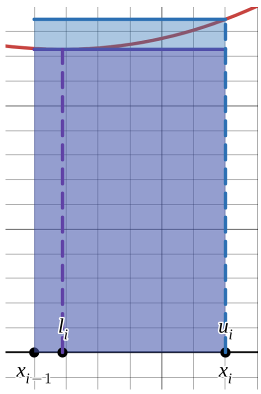
Låt f vara en kontinuerlig funktion på intervallet $[a, b]$. Vårt mål är att göra idén ovan precis för att definiera och räkna ut arean mellan $y = f(x)$ och x-axeln på intervallet $[a, b]$.

Vi delar in intervallet $[a, b]$ i något antal n delintervall genom att välja punkter

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Detta kallas för en **partition**, dvs indelning, av intervallet $[a, b]$ i n delintervall. Notera att delintervallen inte behöver vara lika långa; vi kallar längden av intervallet $[x_{i-1}, x_i]$ för Δx_i.





Låt oss fokusera på det $i$te intervallet $[x_{i-1}, x_i]$ för i mellan 1 och n. Detta är ett slutet och begränsat intervall, och eftersom funktionen är kontinuerlig vet vi från Sats 1.17 att den kommer att ha ett maximum och ett minimum på det intervallet. Vi har alltså en minpunkt l_i och en maxpunkt u_i på intervallet $[x_{i-1}, x_i]$. Vi konstruerar två rektanglar med bas Δx_i: den mindre rektangeln har höjden $f(l_i)$ och arean $f(l_i)\Delta x_i$ och den större har höjden $f(u_i)$ och arean $f(u_i)\Delta x_i$. Det gäller alltså att $f(l_i)\Delta x_i \leq f(u_i)\Delta x_i$.

Anmärkning 4.2.1

Detta gäller om funktionen är positiv. Även om funktionen inte är positiv kan vi beräkna produkterna $f(l_i)\Delta x_i$ och $f(u_i)\Delta x_i$; det gäller fortfarande att $f(l_i)\Delta x_i \leq f(u_i)\Delta x_i$, men man får då en “area med tecken”, eftersom $f(l_i)$ och $f(u_i)$ kan vara negativa. Det visar sig att detta är precis vad som behövs i tillämpningarna av integralen. Allt matematiskt som vi gör här fungerar oavsett om funktionen är positiv eller inte, men den intuitiva bilden av arean gäller om funktionen är positiv.

Vi gör detta för varje i mellan 1 och n och summerar. Detta leder oss till följande begrepp.

Definition 4.1

Låt f vara en kontinuerlig funktion på intervallet $[a, b]$, och låt P vara en partition av intervallet $[a, b]$ i n delintervall.

Den **nedre riemannsumman** $L(f, P)$ definieras som

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta x_i = f(l_1) \cdot (x_1 - x_0) + \cdots + f(l_n) \cdot (x_n - x_{n-1})$$

där l_i är en minimipunkt på intervallet $[x_{i-1}, x_i]$.

Den **övre riemannsumman** $U(f, P)$ definieras som

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x_i = f(u_1) \cdot (x_1 - x_0) + \cdots + f(u_n) \cdot (x_n - x_{n-1})$$

där u_i är en maximipunkt på intervallet $[x_{i-1}, x_i]$.

Om funktionen är positiv är alltså $L(f, P)$ summan av areorna av de mindre rektanglarna, vilket ger en nedre uppskattning av arean under grafen, och $U(f, P)$ är summan av areorna av de större rektanglarna och därmed en övre uppskattning av arean under grafen.

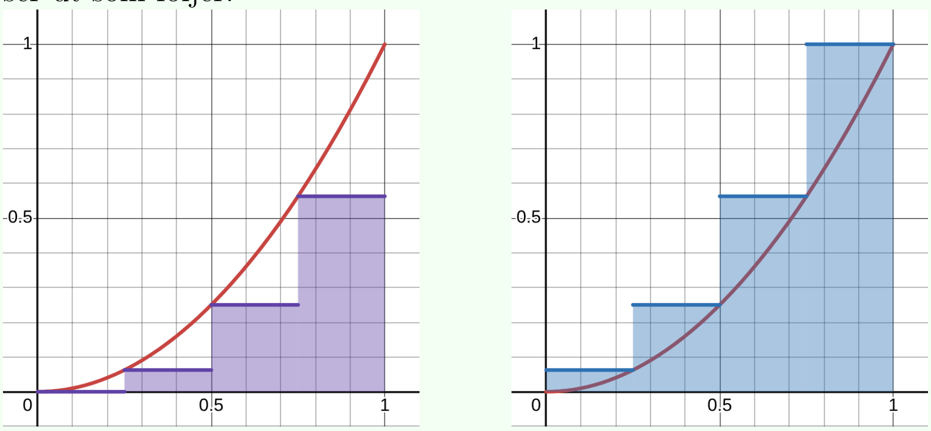
Exempel 4.2.2

Betrakta $f(x) = x^2$ på intervallet $[0, 1]$. Beräkna $L(f, P)$ och $U(f, P)$, där P är partitionen $0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1$, som delar in intervallet $[0, 1]$ i fyra lika långa delintervall.

Lösning. Delintervallen är alltså

$$[0, \tfrac{1}{4}], \quad [\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}], \quad [\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}], \quad \text{och} \quad [\tfrac{3}{4}, 1],$$

så varje delintervall har längd $\Delta x_i = \frac{1}{4}$. Eftersom funktionen är växande på intervallet, är den vänstra ändpunkten en minimipunkt l_i på det $i$te delintervallet, och den högra ändpunkten är en maximipunkt u_i där. Rektanglarna i den nedre och övre riemannsumman ser ut som följer.



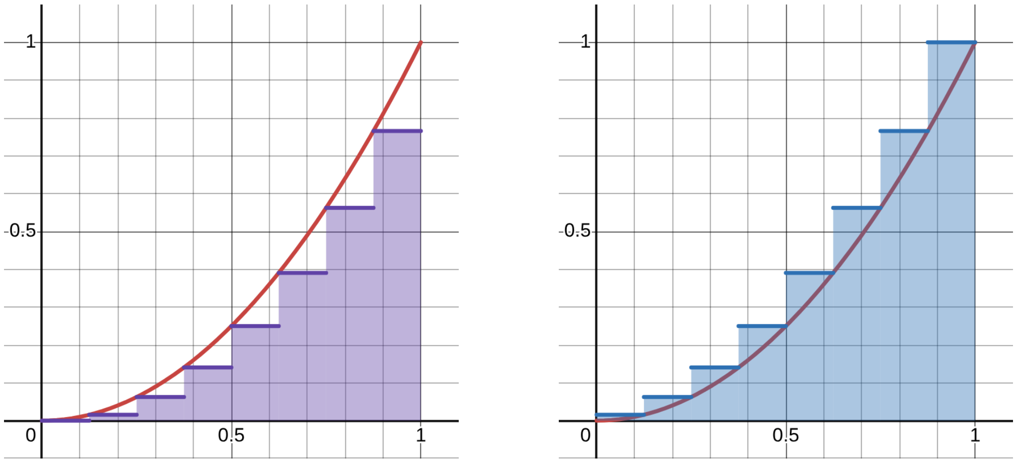
Vi beräknar

$$\begin{aligned}
L(f, P) &= \sum_{i=1}^{4} f(l_i)\Delta x_i \\
&= f(l_1) \cdot \tfrac{1}{4} + f(l_2) \cdot \tfrac{1}{4} + f(l_3) \cdot \tfrac{1}{4} + f(l_4) \cdot \tfrac{1}{4} \\
&= f(0) \cdot \tfrac{1}{4} + f(\tfrac{1}{4}) \cdot \tfrac{1}{4} + f(\tfrac{1}{2}) \cdot \tfrac{1}{4} + f(\tfrac{3}{4}) \cdot \tfrac{1}{4} \\
&= 0^2 \cdot \tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{4})^2 \cdot \tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{2})^2 \cdot \tfrac{1}{4} + (\tfrac{3}{4})^2 \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{7}{32}
\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}
U(f,P) &= \sum_{i=1}^{4} f(u_i)\Delta x_i \\
&= f(u_1)\cdot\tfrac{1}{4} + f(u_2)\cdot\tfrac{1}{4} + f(u_3)\cdot\tfrac{1}{4} + f(u_4)\cdot\tfrac{1}{4} \\
&= f(\tfrac{1}{4})\cdot\tfrac{1}{4} + f(\tfrac{1}{2})\cdot\tfrac{1}{4} + f(\tfrac{3}{4})\cdot\tfrac{1}{4} + f(1)\cdot\tfrac{1}{4} \\
&= (\tfrac{1}{4})^2\cdot\tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{2})^2\cdot\tfrac{1}{4} + (\tfrac{3}{4})^2\cdot\tfrac{1}{4} + 1^2\cdot\tfrac{1}{4} = \tfrac{15}{32}.
\end{aligned}$$

Genom att förfina partitionen får vi bättre uppskattningar av arean. Om vi delar upp varje delintervall i exemplet ovan i två delar, får vi en ny partition P'. Bilden ser då ut som följer.



Vi lämnar det som övning att beräkna riemannsummorna; resultatet blir $L(f,P') = \frac{35}{128}$, vilket är större än $\frac{7}{32}$, och $U(f,P') = \frac{51}{128}$, vilket är mindre än $\frac{15}{32}$.

Partitionen P' är en förfining av partitionen P, dvs den fås genom att dela upp delintervallen i P i mindre delintervall. Vi ser att en förfining av partitionen leder till att de nedre riemannsummorna ökar och de övre riemannsummorna minskar. Allmänt gäller att om P' är en förfining av P, så är $L(f,P') \geq L(f,P)$ och $U(f,P') \leq U(f,P)$, så

$$L(f,P) \leq L(f,P') \leq U(f,P') \leq U(f,P).$$

Dessutom gäller att om P_1 och P_2 är vilka partitioner som helst, så är

$$L(f,P_1) \leq U(f,P_2).$$

Varje nedre riemannsumma är alltså mindre än varje övre riemannsumma. Genom att välja våra partitioner allt finare, kan vi minska avståndet mellan de övre och nedre summorna. Den storhet vi vill åt, "arean med tecken", ligger någonstans däremellan, så "i bästa fall" är detta avstånd noll, så att de nedre summorna och de övre summorna möts i ett och samma reella tal I. I så fall finns det ett entydigt tal I som uppfyller

$$L(f, P_1) \leq I \leq U(f, P_2)$$

oavsett vilka partitioner P_1 och P_2 vi väljer. Detta tar vi som definitionen av integralen.

Definition 4.2: Integralen

Låt $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. Om det finns ett entydigt bestämt tal I sådant att $I \geq L(f, P)$ för varje partition P av $[a, b]$, och $I \leq U(f, P)$ för varje partition P av $[a, b]$, så säger vi att f är **integrerbar** på intervallet $[a, b]$. Talet I kallas då för **integralen av f på $[a, b]$** eller **integralen av f från a till b**, och vi skriver

$$I = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Anmärkning 4.2.3: Notation

Notationen för integralen består av olika delar. **Integraltecknet** $\int$ är en stiliserad variant av bokstaven "S" som i summa, och betonar kopplingen till riemannsummor. Talen a och b kallas för den nedre respektive övre **integrationsgränsen**. Funktionen f som ska integreras kallas för **integranden**. Slutligen anger dx att integrationen är med avseende på variabeln x. Observera att det inte spelar någon roll vilket namn på variabeln vi väljer, utan

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b f(\heartsuit)\, d\heartsuit$$

osv. Detta beror på att integralen är ett tal och inte en funktion, så när man integrerar försvinner variabeln. Detta är rimligt med tanke på att arean under en kurva inte påverkas av hur vi betecknar koordinataxlarna.

Rent stilistiskt skriver man ibland integrationsgränserna närmare integraltecknet, som $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Man kan fråga sig hur ofta detta "bästa fall" är uppfyllt: vilka kontinuerliga funktioner är integrerbara? Följande sats ger ett positivt besked.

Sats 4.3

Om funktionen f är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$, så är f integrerbar på $[a, b]$.

Integralberäkning med riemannsummor

Definitionen av integralen är inte konstruktiv: den säger inte hur vi bestämmer talet I. Detta ska vi ägna oss åt nu. Vi börjar med att generalisera exemplen i det förra avsnittet.

Anmärkning 4.2.4

Vi kommer att behöva några summaformler nedan.

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} 1 = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = n, \\ &\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \text{och} \\ &\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Den första formeln gäller per definition och den andra har du säkert mött förr, medan den tredje kan visas på flera sätt, t ex genom induktion.

Exempel 4.2.5

Betrakta $f(x) = x^2$ på intervallet $[0, 1]$. Beräkna $L(f, P)$ och $U(f, P)$, där P är partitionen av intervallet $[0, 1]$ i n lika långa delintervall (där n är något positivt heltal).

Lösning. Vi har de n delintervallen

$$[0, \tfrac{1}{n}], \quad [\tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}], \quad \ldots \quad [\tfrac{n-1}{n}, 1],$$

Det $i$te intervallet är alltså $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ och har längd $\Delta x_i = \frac{1}{n}$. Eftersom f är växande på intervallet, är $l_i = \frac{i-1}{n}$ (den vänstra ändpunkten) och $u_i = \frac{i}{n}$ (den högra ändpunkten). Vi börjar med att beräkna den övre riemannsumman

$$\begin{aligned} U(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \end{aligned}$$

Enligt summaformeln från Anmärkning 4.2.4 får vi alltså

$$U(f,P) = \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

På samma sätt har vi den nedre riemannsumman

$$\begin{aligned} L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)\frac{1}{n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)^2}{n^3} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 \end{aligned}.$$

Notera att

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2,$$

och eftersom $0^2 = 0$ är detta alltså summan av de $n-1$ första kvadraterna. Vi kan använda summaformeln ovan, med $n-1$ istället för n, och få

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 = \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

Därmed är

$$U(f,P) = \frac{1}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}.$$

I exemplet beräknade vi $U(f,P)$ och $L(f,P)$, där P är partitionen av $[0,1]$ i n delintervall. Vad händer om vi tar gränsvärdet då antalet intervall $n \to \infty$ (och deras längd $\frac{1}{n} \to 0$)? För de övre riemannsummorna gäller

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6\cancel{n^2}} = \frac{1}{3},$$

och för de nedre riemannsummorna gäller

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})}{6\cancel{n^2}} = \frac{1}{3}.$$

Båda gränsvärdena är alltså $\frac{1}{3}$. Från det kommer vi nu att kunna dra slutsatsen att

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$$

Resonemanget är som följer: funktionen är kontinuerlig och därför vet vi att den är integrerbar, så det finns ett entydigt tal I som uppfyller kraven i definitionen av integralen. Eftersom varje nedre riemannsumma är mindre än eller lika med varje övre riemannsumma, är gränsvärdet av nedre riemannsummor också mindre än eller lika med varje övre riemannsumma. På samma sätt är gränsvärdet av övre riemannsummor större än eller lika med varje nedre riemannsumma. Talet $\frac{1}{3}$ fick vi samtidigt som gränsvärdet av nedre och av övre riemannsummor. Det uppfyller alltså kraven i definitionen av integralen, och eftersom det bara finns ett tal som gör det, måste integralen vara $\frac{1}{3}$.

Genom att ta gränsvärdet fick vi alltså värdet på integralen, och det spelade ingen roll om vi tog gränsvärdet av de övre riemannsummorna (där rektanglarnas höjd är maximal) eller de nedre riemannsummorna (där rektanglarnas höjd är minimal). Genom ett slags klämsats kan vi konstatera att man kan välja vilken punkt som helst på varje delintervall! Om funktionen f är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$, och vi väljer en partition av intervallet i n delintervall $[x_{i-1}, x_i]$, kan vi definiera en **allmän riemannsumma** som

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i,$$

där c_i är en valfri punkt på intervallet $[x_{i-1}, x_i]$. (Som vanligt betecknar $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ delintervallets längd.) Vi får nu till slut en formel för att beräkna integralen.

Sats 4.4

Låt $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion, dela in intervallet $[a, b]$ i n delintervall $[x_0, x_1], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ och betrakta riemannsumman

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i,$$

där c_i är någon punkt på delintervallet $[x_{i-1}, x_i]$ och $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Då är

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \text{alla}\Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Anmärkning 4.2.6

I gränsvärdet går alltså $n \to \infty$ och $\Delta x_i \to 0$ för alla i. I exemplen ovan delade vi in intervallet $[a, b]$ i n lika långa delintervall, så intervallens bredd gick automatiskt mot 0 när antalet intervall gick mot oändligheten. I allmänhet behöver det dock inte vara så, och därför måste man kräva båda delarna.

Bevis: Vi jämför vår riemannsumma med den nedre riemannsumman $\sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta x_i$ och den övre riemannsumman $\sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x_i$. Här är l_i och u_i en minpunkt respektive maxpunkt på intervallet $[x_{i-1}, x_i]$. Därför gäller

$$f(l_i) \le f(c_i) \le f(u_i)$$

så

$$\sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x_i.$$

När vi tar gränsvärdet då $n \to \infty$ och alla $\Delta x_i \to 0$, kommer den nedre och den övre riemannsumman att gå mot $I = \int_a^b f(x)\,dx$, enligt samma resonemang som vi gjorde ovan för $\int_0^1 x^2\,dx$. Vi har alltså

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta x_i}_{\longrightarrow I} \leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x_i}_{\longrightarrow I}.$$

Man kan visa att klämsatsen även gäller för denna typ av gränsvärden. Därför följer det att även

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \to I,$$

vilket skulle visas.

Som vi tidigare nämnt behöver inte funktionerna vara positiva. Vi belyser detta två exempel.

Exempel 4.2.7

Beräkna $\int_0^1 (-x^2)\,dx$.

Lösning. Enligt Sats 4.4 kan vi beräkna integralerna som gränsvärdet av valfri riemannsumma. Vi väljer att dela in intervallet $[0,1]$ i n lika långa delintervall och ta

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

där c_i är den *högra ändpunkten* i det $i$te intervallet. (Detta blir i själva verket den nedre riemannsumman, eftersom funktionen är avtagande, så den högra ändpunkten är en minpunkt.)

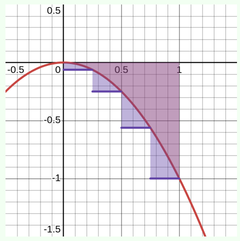
Vi har alltså

$$c_i = \frac{i}{n}, \quad f(c_i) = -(c_i)^2 = -\left(\tfrac{i}{n}\right)^2, \quad \text{och} \quad \Delta x_i = \tfrac{1}{n},$$

så

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} -\left(\tfrac{i}{n}\right)^2 \tfrac{1}{n} = -\sum_{i=1}^{n} \left(\tfrac{i}{n}\right)^2 \tfrac{1}{n}.$$

Figuren nere till höger visar hur detta ser ut för $n = 4$. Sånär som på tecknet är detta samma summa som vi beräknade i Exempel 4.2.5 när vi beräknade $\displaystyle\int_0^1 x^2\, dx$, och är alltså lika med $-\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$.



När $n \to \infty$ (och alla $\Delta x_i \to 0$) går detta mot $-\frac{1}{3}$. Vi får alltså $\displaystyle\int_0^1 (-x^2)\, dx = -\frac{1}{3}$. Att detta är precis lika med $-\int_0^1 (x^2)$ är förstås inget sammanträffande; geometriskt beror detta på att det är samma area, men nu under x-axeln. Poängen med exemplet är att visa hur detta hänger samman med riemannsummorna.

Exempel 4.2.8

Beräkna $\displaystyle\int_0^1 (\frac{1}{3} - x^2)\, dx$.

Lösning. Vi använder samma partition som i förra exemplet och fortsätter med de högra ändpunkterna. Nu är

$$c_i = \frac{i}{n}, \quad f(c_i) = \tfrac{1}{3} - (c_i)^2 = \tfrac{1}{3} - \left(\tfrac{i}{n}\right)^2, \quad \text{och} \quad \Delta x_i = \tfrac{1}{n},$$

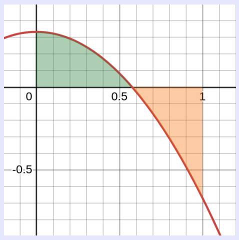
så

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (\tfrac{1}{3} - \left(\tfrac{i}{n}\right)^2)\tfrac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{3n} - \sum_{i=1}^{n} \left(\tfrac{i}{n}\right)^2 \tfrac{1}{n}.$$

Vi lämnar det som övning att övertyga sig om att den första summan är lika med $\frac{1}{3}$. Den andra summan är, som i förra exemplet, lika med $-\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$. När $n \to \infty$ (och alla $\Delta x_i \to 0$) går detta alltså mot $\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$. Vi får alltså $\int_0^1 (\frac{1}{3} - x^2)\, dx = 0$.

Anmärkning 4.2.9

Att integralen i det förra exemplet blev 0 beror på att olika tecken tar ut varandra. Detta kan man se geometriskt i figuren till höger. Ur definitionen av integralen följer det att det vi beräknar är arean mellan kurvans positiva del och x-axeln minus arean mellan kurvans positiva del och x-axeln. Om dessa två areor är lika stora är integralen därför 0.



Exempel 4.2.10

En partikel rör sig längs x-axeln. Partikelns hastighet vid tiden t ges av $f(t) = \frac{1}{3} - t^2$. (Positiv hastighet innebär att partikeln rör sig till höger, och negativ hastighet att den rör sig till vänster.) Vid tiden $t = 0$ är den i origo. För att ta reda på var partikeln befinner sig vid tiden $t = 1$, behöver vi beräkna den ackumulerade förflyttningen över tidsintervallet $[0, 1]$. Som i exemplet i början av detta kapitel ges detta av integralen av hastigheten över detta intervall, dvs

$$\int_0^1 \tfrac{1}{3} - t^2 \, dt.$$

I förra exemplet såg vi att denna integral är lika med noll. Partikeln har därför sammanlagt förflyttat sig 0 från origo, och är tillbaka i origo vid $t = 0$. Detta beror på att funktionen $\frac{1}{3} - t^2$ byter tecken på intervallet, som vi kan se i grafen i anmärkningen ovan. Partikeln rör sig alltså först åt höger, långsammare och långsammare, tills den vänder efter drygt halva tiden och rör sig allt snabbare åt vänster.

Anmärkning 4.2.11

Det kan tyckas opraktiskt att använda riemannsummor för att beräkna integraler, särskilt då vi kommer att använda så kallade primitiva funktioner ("antiderivator") för att beräkna integraler i Avsnitt 4.4 nedan. (Du kanske redan stött på detta i dina tidigare studier.) Det finns dock både teoretiska och praktiska anledningar:

- Vi behöver *definiera* integralen på något sätt för att överhuvudtaget kunna bevisa att den kan beräknas med hjälp av primitiva funktioner.

- Definitionen med hjälp av riemannsummor lämpar sig väl för *numeriska beräkningar* och approximationer. Inom tillämpningar får man ofta inte en funktion f som ges av någon behändig formel, utan snarare en värdetabell där $f(c_i)$ fåtts för ändligt många punkter c_i genom något slags experimentellt arbete. Man kan då approximera integralen med en lämplig riemannsumma.

- Även om funktionen f ges av en formel är det i allmänhet svårt att bestämma primitiv funktion. Man kan då *programmera* en dator för att beräkna integralen, och återigen är definitionen via riemannsummor användbar.

4.3 Egenskaper hos integralen

Vi börjar med att sammanfatta några grundläggande egenskaper hos integralen, som kommer att vara användbara i beräkningar.

Sats 4.5: Egenskaper hos integralen

Om $a, b, c \in \mathbb{R}$ och f och g är kontinuerliga funktioner på de aktuella intervallen, så gäller

a) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0,$

b) $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx,$

c) $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$

d) $\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$

e) $\displaystyle\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$, där $k \in \mathbb{R}$ är en konstant,

f) $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$, om f är udda på intervallet $[-a, a]$,

g) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$, om f jämn på intervallet $[-a, a]$, och

h) $\displaystyle\left|\int_{a}^{b} f(x)\,dx\right| \le \int_{a}^{b} |f(x)|\,dx$.

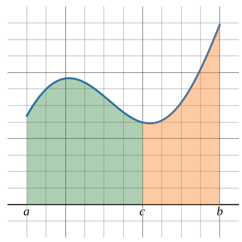
Bevis/geometrisk idé Låt oss geometriskt förstå och till viss del bevisa de olika delarna.

Del **a)** följer av att intervallet $[a, a]$ har längd 0, så varje partition av intervallet består av ett enda delintervall av längd $\Delta x_1 = 0$. Varje riemannsumma är därför lika med 0. Den geometriska tolkningen är att arean av ett område med bredd 0 är 0.

Del **b)** ser kanske konstig ut: om $b > a$ så kan man ju inte tala om intervallet $[b, a]$. Den är att betrakta som en konvention: om $b > a$, så definierar vi integralen

$$\int_{b}^{a} f(x)\,dx$$

med hjälp av riemannsummor, där nu Δx_i är *negativt*, vilket svarar mot att vi går från b åt vänster till a. Detta kommer att vara användbart när man beräknar integraler där integrationsgränserna är obekanta.

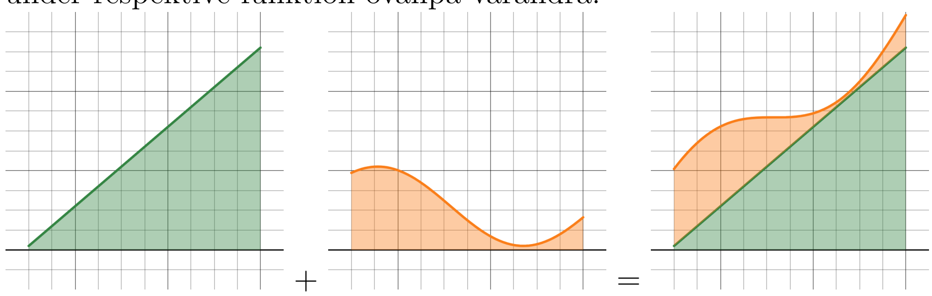


Del **c)** illustreras bäst av figuren till höger. Geometriskt innebär den att den totala arean är summan av de två delarna på vardera sidan om $x = c$. Man kan bevisa detta genom att slå ihop en partition av $[a, c]$ och en partition av $[c, b]$ till en partition av $[a, b]$; vi hoppar över detta.

Del **d)** säger att integralen är kompatibel med addition. För att bevisa den använder vi Sats 4.4:

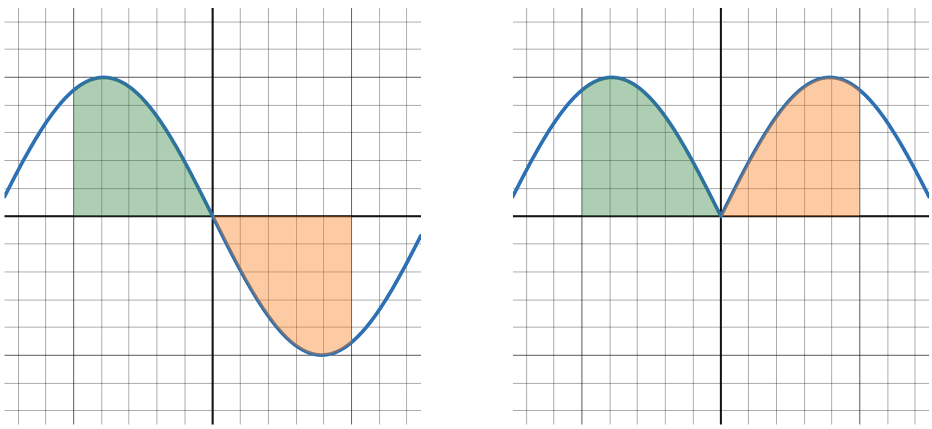
$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)+g(x)\ dx &= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \text{alla}\Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} (f(c_i)+g(c_i))\Delta x_i \\
&= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \text{alla}\Delta x_i \to 0}} \left(\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(c_i)\Delta x_i \right) \\
&= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \text{alla}\Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \ + \lim_{\substack{n\to\infty \\ \text{alla}\Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \\
&= \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx,
\end{aligned}$$

där vi accepterar utan bevis att även denna typ av gränsvärden är kompatibel med summan. Den geometriska tolkningen nedan bygger på att området under $f(x)+g(x)$ fås genom att "stapla" områdena under respektive funktion ovanpå varandra.



Del **e)** säger, på motsvarande sätt, att integralen är kompatibel med skalning.

Del **f)** och **g)** utnyttjar symmetrin hos funktionen f, vilket illustreras av figurerna nedan.



I båda fallen är arean till höger om y-axeln lika med arean till vänster om y-axeln; då funktionen är udda (som i den vänstra figuren) är tecknen olika och den totala integralen är noll, och i det jämna fallet är tecknen lika och den totala integralen är dubbelt så stor som integralen av funktionen till höger om y-axeln. Mest användbar är f), som gör att man kan eliminera integraler av udda funktioner på symmetriska intervall utan att beräkna dem.

I del **h)** är det viktigt att notera att absolutbeloppet av integralen är *mindre än eller lika med* integralen av absolutbeloppet, och inte nödvändigtvis lika med, som vi kommer att se i nästa exempel.

Integralens geometriska tolkning

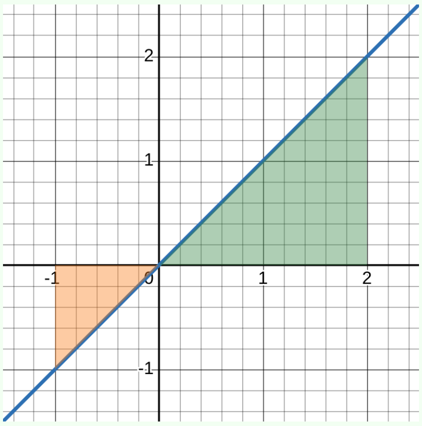
Vi har sagt att vi *definierar* arean av området under grafen genom integralen. Från skolan kan vi beräkna arean av vissa välbekanta geometriska former, som cirklar och trianglar, med andra metoder. För att vara riktigt noga måste vi egentligen verifiera att både integralen och formlerna från skolan ger samma resultat, ifall området är en cirkel, en triangel, osv. Vi har sett att det stämmer för rektanglar. Det visar sig, som tur är, att det mycket riktigt är så, vilket man kan visa genom att beräkna motsvarande riemannsummor. Vi gör inte detta här, utan nöjer oss med slutsatsen att *om området under grafen är en (del av) en cirkelskiva, en triangel, en rektangel, eller en union av sådana områden, så ger integralen och de välkända formlerna samma svar.* Därmed kan vi använda geometriska resonemang för att beräkna vissa integraler.

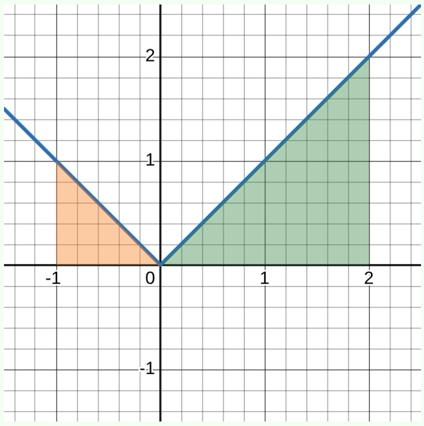
Exempel 4.3.1

Använd ett geometriskt resonemang för att beräkna

a) $\int_{-1}^{2} x\, dx$, b) $\left|\int_{-1}^{2} x\, dx\right|$, c) $\int_{-1}^{2} |x|\, dx$.

Lösning.





a) I figuren till vänster ser vi kurvan $y = x$. Enligt resonemanget i Anmärkning 4.2.9 är integralen lika med arean av den stora triangeln minus arean av den lilla triangeln, dvs

$$\int_{-1}^{2} x \, dx = \frac{2 \cdot 2}{2} - \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{3}{2}.$$

b) Detta är absolutbeloppet av integralen i a), dvs $|\frac{3}{2}| = \frac{3}{2}$.

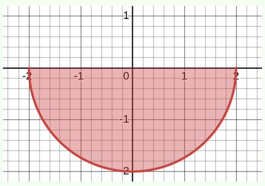
c) I figuren till höger ser vi kurvan $y = |x|$. Integralen är nu summan av de två trianglarnas areor, dvs

$$\int_{-1}^{2} |x| \, dx = \frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Notera hur absolutbeloppet av integralen av $f(x) = x$ är mindre än integralen av absolutbeloppet $|f(x)| = |x|$. Vi har alltså olikhet enligt del h) av satsen ovan.

Exempel 4.3.2

För att beräkna $\displaystyle\int_{-2}^{2} -\sqrt{4 - x^2} \; dx$ kan vi använda ett geometriskt resonemang. Kurvan $y = -\sqrt{4 - x^2}$ på $[-2, 2]$ är en halvcirkel: det är den nedre halvan av kurvan $y^2 = 4 - x^2$,



dvs $x^2 + y^2 = 2^2$, som är en cirkel med radie 2 och centrum i origo. Integralen är alltså minus halva cirkelns area. Eftersom cirkelns area är 4π är

$$\int_{-2}^{2} -\sqrt{4 - x^2}\, dx = -2\pi.$$

En medelvärdessats för integraler

Liksom derivatan uppfyller även integralen ett slags medelvärdessats.

Sats 4.6: Medelvärdessats för integraler

Om funktionen f är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$, så är

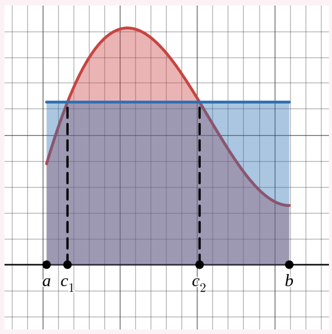
$$\int_a^b f(x)\, dx = (b - a)f(c)$$

för något $c \in [a, b]$.

Satsen är av stor teoretisk betydelse. Den är dock inte konstruktiv, i bemärkelsen att den inte ger någon information om hur vi kan hitta ett sådant c. Notera också att det kan finnas flera möjliga $c \in [a, b]$.

Idé

Den geometriska tolkningen av satsen i fallet då f är positiv är följande: arean under grafen, dvs $\int_a^b f(x)\, dx$, är lika med arean av en rektangel med bas $b - a$ och höjd $f(c)$, dvs $(b - a)f(c)$, för någon väl vald punkt $c \in [a, b]$. Om f inte är positiv gäller denna tolkning ifall man förstår arean och höjden som en area/höjd med tecken.



Bevis: Eftersom funktionen är kontinuerlig på det slutna intervallet $[a, b]$, ger Sats 1.17 att den har ett minsta värde $f(l)$ och ett största värde $f(u)$, där l och u ligger i intervallet $[a, b]$. Integralen uppfyller därför

$$(b-a)f(l) \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq (b-a)f(u),$$

och division med $b-a$ ger

$$f(l) \leq \frac{\int_a^b f(x)\ dx}{b-a} \leq f(u).$$

Enligt satsen om mellanliggande värden, som gäller då f är kontinuerlig, antar funktionen alla värden mellan $f(l)$ och $f(u)$. Eftersom $\frac{\int_a^b f(x)\ dx}{b-a}$ är ett sådant värde innebär detta att $\frac{\int_a^b f(x)\ dx}{b-a} = f(c)$ för något $c \in [a,b]$, vilket är innebörden av att f antar det värdet i punkten c. Med andra ord är $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = (b-a)f(c)$, vilket skulle visas.

Integralen av styckvis kontinuerliga funktioner

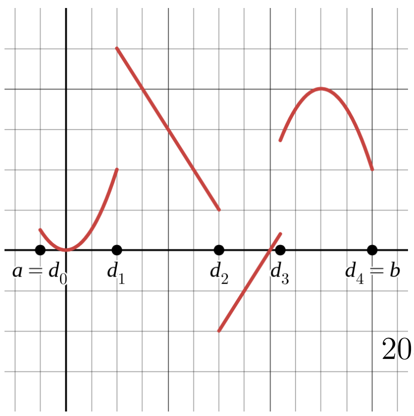
Vi har hittills bara definierat integralen av kontinuerliga funktioner. Man kan utvidga definitionen till vissa diskontinuerliga funktioner som följer.

Definition 4.7

Antag att $a = d_0 < d_1 < d_2 \cdots < d_n = b$ är punkter på intervallet $[a,b]$, och att funktionen f är definierad på det öppna intervallet (d_{i-1}, d_i) för varje $i = 1, 2, \ldots, n$. Antag vidare att på varje (d_{i-1}, d_i) så är $f(x) = f_i(x)$, där f_i är kontinuerlig på det slutna intervallet $[d_{i-1}, d_i]$. Då definierar vi integralen av f på $[a,b]$ som

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_{d_0}^{d_1} f_1(x)\ dx + \int_{d_1}^{d_2} f_2(x)\ dx + \cdots + \int_{d_{n-1}}^{d_n} f_n(x)\ dx.$$

Figuren visar ett sådant exempel. Kravet på funktionen f ser tekniskt ut, men innebär att den är kontinuerlig utom möjligen i ändligt många punkter d_i, och att den kan utvidgas till dessa punkter. Detta garanterar att hoppen som funk-



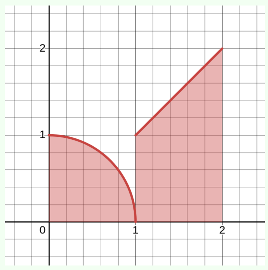
tionen gör är ändliga (och utesluter t ex att $f(x) \to \infty$ någonstans på $[a, b]$, ett beteende vi kommer att studera senare). Funktionen är alltså *styckvis kontinuerlig med ändligt många ändliga hopp.*

Exempel 4.3.3

Beräkna $\displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx$, där

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{om } 0 \le x < 1, \\ x & \text{om } 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Lösning. Från definitionen ovan har vi



$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx + \int_1^2 x\, dx.$$

Den första integralen i högerledet är arean av en kvartscirkel med radie 1, och den andra är arean av ett område som består av en och en halv kvadrat med sidan 1. Vi har därför

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{4} \quad \text{och} \quad \int_1^2 x\, dx = \frac{3}{2},$$

så $\displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} = \frac{\pi+6}{4}.$

4.4 Primitiva funktioner och analysens huvudsats

Vi ska nu koppla samman derivator och integraler. Till detta behöver vi ett slags omvändning av derivatan.

Definition 4.8

Antag att f är en funktion som är definierad på något intervall I. Vi säger att en funktion F är en **primitiv funktion** till funktionen f på intervallet I om $F'(x) = f(x)$ för alla $x \in I$.

Exempel 4.4.1

- Funktionen $F(x) = x^2$ är en primitiv funktion till $f(x) = 2x$ på $\mathbb{R}$, eftersom $F'(x) = 2x$ för alla $x \in \mathbb{R}$.
- Funktionen $G(x) = x^2 + 7$ är också en primitiv funktion till $f(x) = 2x$ på $\mathbb{R}$, eftersom $G'(x) = 2x + 0 = 2x$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Exemplet visar att det inte finns en unik primitiv funktion: om F är en primitiv funktion till f (på något intervall), och $G(x) = F(x) + C$, där C är en konstant, så är $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$, så G är också en primitiv funktion till f. Därför säger man *en primitiv funktion* istället för *den primitiva funktionen*, eftersom man är fri att addera konstanter. Som nästa sats visar är detta den enda frihet man har.

Sats 4.9

Om F och G är primitiva funktioner till f på något intervall (a, b), så är $G(x) = F(x) + C$, där $C \in \mathbb{R}$ är en konstant, på intervallet.

Bevis: Att både F och G är primitiva funktioner till f betyder att $F'(x) = f(x)$ och $G'(x) = f(x)$ för alla $x \in (a, b)$. Detta innebär att

$$\frac{d}{dx}(G(x) - F(x)) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

så $G(x) - F(x)$ är en konstant C enligt sats 2.18. Därför är $G(x) = F(x) + C$.

Ofta låter man bli att specificera vilket intervall det handlar om. Om man säger att F är en primitiv funktion till f, utan att ange något intervall, menar man att man betraktar ett intervall där $F'(x) = f(x)$ gäller på hela intervallet. På det intervallet är alltså F deriverbar med derivatan f.

Exempel 4.4.2

Om $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x) = x^r$, där $r \neq -1$, så är

$$F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$$

för någon konstant C, eftersom

$$F'(x) = \frac{\cancel{(r+1)}x^r}{\cancel{r+1}} + 0 = x^r.$$

Vi står nu äntligen redo att koppla samman derivator och integraler. Denna koppling är så fundamental att den kallas för *analysens huvudsats*.

Sats 4.10: Analysens huvudsats

Låt f vara en funktion som är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$.
Del I. Funktionen

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

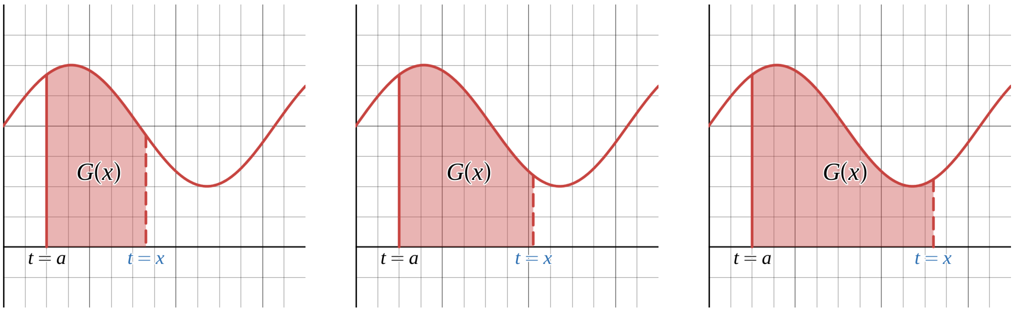
uppfyller $G'(x) = f(x)$ för alla $x \in [a, b]$.
Del II. Det gäller att

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a),$$

där F är någon primitiv funktion till f på intervallet $[a, b]$.

Del I ger oss ett sätt att konstruera en primitiv funktion med hjälp av integraler, medan Del II säger att vi kan beräkna integraler med hjälp av primitiva funktioner. Del II, som kommer att vara ett viktigt verktyg för att beräkna integraler, följer från Del I, som vi kommer att se i beviset.

Låt oss först därför undersöka Del I lite närmare. Det är viktigt att förstå vilken roll variablerna t och x spelar. Integralen är med avseende på t, och svarar geometriskt mot arean (med tecken) mellan kurvan $y = f(t)$ och t-axeln. Den vänstra integrationsgränsen $t = a$ är konstant, medan den högra integrationsgränsen $t = x$ är variabel. Funktionen $G(x)$ är en funktion av den variabeln x. I figuren nedan är $G(x)$ arean av området under grafen, över t-axeln, mellan $t = a$ och $t = x$ för några olika värden på x.



Derivatan $G'(x)$ anger alltså förändringshastigheten i integralen, och beskriver hur snabbt arean (med tecken) ändras då x ändras. Del I i satsen säger att denna förändringshastighet precis ges av funktionen f, dvs

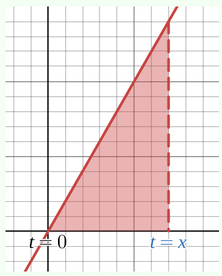
$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x).$$

Låt oss titta på ett exempel där vi kan räkna ut alla delar konkret.

Exempel 4.4.3

Vi betraktar $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ i fallet då $f(t) = 2t$ och $a = 0$. Vi har alltså

$$G(x) = \int_0^x 2t\,dt.$$



När $x > 0$ är detta arean av en triangel med bas x och höjd $2x$, som vi ser i figuren. Arean av triangeln är $\frac{x \cdot 2x}{2} = x^2$, så

$$G(x) = x^2.$$

(Notera att variabeln t inte förekommer i uttrycket: den har "integrerats klart".) Genom en enkel derivering får vi $G'(x) = 2x$, vilket är precis vad Del I av Analysens huvudsats säger:

$$G'(x) = f(x) = 2x.$$

Anmärkning 4.4.4

Notera hur den vänstra ändpunkten inte spelar någon roll för värdet av $G'(x)$. Om vi upprepar föregående exempel med $a = 1$ istället för $a = 0$ får vi $G(x) = x^2 - 1$ (gör gärna detta!). Skillnaden är alltså en konstant, vilket inte påverkar derivatan: $G'(x) = 2x$. Detta är rimligt: en ändring av den vänstra ändpunkten svarar mot att lägga till eller ta bort en konstant area till integralen, vilket förändrar värdet av $G(x)$, men inte derivatan. Genom huvudsatsen hänger detta samman med att två primitiva funktioner bara skiljer sig åt på en konstant.

Beviset av huvudsatsen är relativt kort och mycket instruktivt.

Bevis av Analysens huvudsats:
Del I Vi deriverar $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ med avseende på x. Enligt derivatans definition är

$$\begin{aligned} G'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\int\limits_a^{x+h} f(t)\,dt - \int\limits_a^{x} f(t)\,dt}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int\limits_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}, \end{aligned}$$

där den sista likheten följer från integralens egenskaper (Sats 4.5.c). Enligt medelvärdessatsen för integraler (Sats 4.6) är

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = (x + h - x)f(c) = hf(c)$$

för något $c \in [x, x + h]$, så

$$\lim_{h\to 0} \frac{\int\limits_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{hf(c)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c).$$

Eftersom c ligger mellan x och $x + h$, kommer $c \to x$ då $h \to 0$, så

$$\lim_{h\to 0} f(c) = \lim_{c\to x} f(c),$$

men f är kontinuerlig, så detta är lika med $f(x)$ enligt definitionen av kontinuitet. Alltså har vi visat att $G'(x) = f(x)$, dvs Del I.

Del II Låt nu F vara någon primitiv funktion till f på intervallet $[a, b]$. Eftersom funktionen G från Del I är en sådan primitiv funktion, säger Sats 4.9 att

$$F(x) = G(x) + C = \int_a^x f(t)\,dt + C, \qquad C \text{ konstant},$$

för alla $x \in [a, b]$. Särskilt gäller alltså

$$\begin{aligned} F(b) &= G(b) + C = \int_a^b f(t)\,dt + C \qquad\qquad \text{och} \\ F(a) &= G(a) + C = \int_a^a f(t)\,dt + C = 0 + C. \end{aligned}$$

När vi subtraherar $F(b) - F(a)$ tar konstanterna ut varandra; vi får

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt,$$

och satsen är därmed bevisad.

Exempel 4.4.5

Beräkna

a) $\frac{d}{dx}\int_7^x e^{-t^2}\,dt,$ b) $\frac{d}{dx}\int_7^{x^3} e^{-t^2}\,dt,$ och c) $\frac{d}{dx}\int_x^{x^3} e^{-t^2}\,dt.$

Lösning.

a) Vi kan använda huvudsatsens första del med $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ där $f(t) = e^{-t^2}$. Vi får då

$$\frac{d}{dx}\int_7^x e^{-t^2}\,dt = G'(x) = e^{-x^2}.$$

Notera att huvudsatsen gör att vi inte behöver räkna ut integralen för att bestämma dess derivata.

b) Även här låter vi $G(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. Det vi söker är alltså $\frac{d}{dx}G(x^3)$. Vi kan då använda kedjeregeln med G som yttre funktion och x^3 som inre funktion. Den inre derivatan är $3x^2$, så

$$\frac{d}{dx}\int_7^{x^3} e^{-t^2}\, dt = G'(x^3)\cdot 3x^2 = e^{-(x^3)^2}\cdot 3x^2 = 3x^2e^{-x^6}.$$

c) Här har vi både en variabel undre gräns och en variabel övre gräns. Eftersom Del I av huvudsatsen bara kan hantera en variabel åt gången, och den variabeln måste vara i den övre gränsen, delar vi upp integralen i en valfri punkt. Låt oss välja att dela upp i $t = 7$, så

$$\int_x^{x^3} e^{-t^2}\, dt = \int_x^{7} e^{-t^2}\, dt + \int_7^{x^3} e^{-t^2}\, dt = -\int_7^{x} e^{-t^2}\, dt + \int_7^{x^3} e^{-t^2}\, dt,$$

där vi använde Sats 4.5.b) för att vända på gränserna. Deriverar vi detta så får vi

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dx}\int_x^{x^3} e^{-t^2}\, dt &= \tfrac{d}{dx}\left(-\int_7^{x} e^{-t^2}\, dt + \int_7^{x^3} e^{-t^2}\, dt\right)\\ &= \tfrac{d}{dx}\int_7^{x^3} e^{-t^2}\, dt - \frac{d}{dx}\int_7^{x} e^{-t^2}\, dt,\end{aligned}$$

vilket är lika med $3x^2e^{-x^6} - e^{-x^2}$ enligt a) och b) ovan.

Exempel 4.4.6

Beräkna

a) $\displaystyle\int_2^3 t^2\, dt$ och

b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos v\, dv$.

Lösning.

a) En primitiv funktion till $f(t) = t^2$ är $F(t) = \frac{t^3}{3}$. Enligt huvudsatsens andra del får vi

$$\int_2^3 t^2 \, dt = F(3) - F(2) = \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{19}{3}.$$

b) Här är $\sin v$ en primitiv funktion till $\cos v$, så huvudsatsens andra del ger

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos v \, dv = \sin 0 - \sin(-\tfrac{\pi}{2}) = 0 - (-1) = 1.$$

Anmärkning 4.4.7

För att beräkna en integral kan man alltså först räkna ut en primitiv funktion till integranden, och sedan sätta in gränserna. För att avlasta hjärnan när man gör detta inför vi notationen

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

I b) i exemplet ovan skulle detta se ut som

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos v \, dv = (\sin v)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 = \sin 0 - \sin(-\tfrac{\pi}{2}) = 0 - (-1) = 1.$$

Obestämda integraler

Vi har sett att om $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$, så är varje primitiva funktion till $f(x)$ lika med $F(x) + C$ för någon konstant $C \in \mathbb{R}$. Den allmänna primitiva funktionen är alltså på formen $F(x) + C$, och för detta har man den behändiga notationen

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Beteckningen ska påminna oss om kopplingen mellan primitiva funktioner och integraler, och kallas för en **obestämd integral**, för att skilja den från integralen

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

som för tydlighets skull även kallas för en **bestämd integral**.

Exempel 4.4.8

Vi har

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C, \qquad C \in \mathbb{R},$$

medan t ex

$$\int_1^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

Anmärkning 4.4.9: Varning!

Det är viktigt att inte blanda ihop bestämda och obestämda integraler. En obestämd integral är en funktion som innehåller en allmän konstant.[a] En bestämd integral är ett reellt tal. Kopplingen ges av Analysens huvudsats: om F är en primitiv funktion till f så är

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad \text{medan} \quad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Observera alltså att det är fel att påstå att

$$\cancel{\int_1^2 x^2\,dx = \frac{7}{3} + C, \qquad C \in \mathbb{R};}$$

det skulle betyda att integralen kan vara vilket reellt tal som helst, men i själva verket är den lika med det reella talet $\frac{7}{3}$. Även om vi använder en annan primitiv funktion än $\frac{x^3}{3}$ för att beräkna integralen, får vi

$$\int_1^2 x^2\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)\Bigg|_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} + \cancel{C}\right) - \left(\frac{1^3}{3} + \cancel{C}\right) = \frac{7}{3},$$

dvs konstanterna tar ut varandra som i beviset av huvudsatsens andra del. Med andra ord är

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

oavsett vilken primitiv funktion F man väljer. Man brukar då välja den som i sammanhanget är enklast. I exemplet ovan valde vi $\frac{x^3}{3}$ och inte t ex $\frac{x^3}{3}+7$; rent matematiskt hade det inte gjort någon skillnad, men vi hade behövt genomföra subtraktionen $7-7$ i onödan.

[a] Man kallar detta för en familj (dvs mängd) av funktioner: en funktion (familjemedlem) för varje värde på C.

Exempel 4.4.10

Bestäm $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx$.

Lösning. Vi vet att $\frac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$. Eftersom $\ln x$ bara är definierat då $x>0$ följer det därför att

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C, \qquad C\in\mathbb{R}, \quad \text{om } x>0.$$

Notera dock att $\dfrac{1}{x}$ även är definierad då $x<0$. Då är inte $\ln x$ definierat, men däremot är $\ln(-x)$ det. (Om t ex $x=-2$ så är $-x=2$ och $\ln(-x)=\ln 2$.) Kedjregeln ger:

$$\frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x} \quad \text{om } x<0.$$

En primitiv funktion till $\frac{1}{x}$ är alltså $\ln x$ om $x>0$ och $\ln(-x)$ om $x<0$. Från definitionen av absolutbeloppet gäller alltså att

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C, \qquad C\in\mathbb{R}.$$

Analysens huvudsats gör att vi kan beräkna integraler genom att beräkna primitiva funktioner. För många funktioner är detta mycket effektivare än att använda riemannsummor. För de grundläggande elementära funktionerna kan vi i princip läsa Tabell 1 från avsnitt 2.9 baklänges. Vi får då Tabell 2 nedan.

Primitiva funktioner är kompatibla med addition och skalning, eftersom derivatan är det: om $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$ och $G(x)$ är en primitiv funktion till $g(x)$, så är $F(x)+G(x)$ en primitiv funktion till

$\int 0\ dx$	$=$	C	
$\int x^r\ dx$	$=$	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + C$	om $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\int \frac{1}{x}\ dx$	$=$	$\ln\lvert x\rvert + C$	
$\int e^x\ dx$	$=$	$e^x + C$	
$\int \cos x\ dx$	$=$	$\sin x + C$	
$\int \sin x\ dx$	$=$	$-\cos x + C$	
$\int \frac{1}{1+x^2}\ dx$	$=$	$\arctan x + C$	
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$	$=$	$\arcsin x + C$	

Tabell 2: Några obestämda integraler ($C \in \mathbb{R}$).

$f(x) + g(x)$, eftersom

$$\frac{d}{dx}(F(x) + G(x)) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

På liknande sätt är $k \cdot F(x)$ en primitiv funktion till $k \cdot f(x)$, om $k \in \mathbb{R}$ är en konstant, eftersom $\frac{d}{dx}(kF(x)) = kF'(x) = kf(x)$. Vi har därmed visat följande.

Sats 4.11

Om f och g är kontinuerliga funktioner, och $k \in \mathbb{R}$ en konstant, så är

$$\int f(x) + g(x)\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$$

och

$$\int kf(x)\ dx = k \int f(x)\ dx.$$

Exempel 4.4.11

Vi har

$$\int e^x - 2\cos x \; dx = e^x - 2\sin x + C, \qquad C \in \mathbb{R},$$

eftersom derivatan av högerledet är $e^x - 2\cos x$.

Anmärkning 4.4.12

Man kan tycka att detta inte stämmer med satsen ovan: vi har ju

$$\int e^x \; dx = e^x + C, \qquad C \in \mathbb{R},$$

och

$$\int \cos x \; dx = \sin x + D, \qquad D \in \mathbb{R};$$

borde inte då

$$\int e^x - 2\cos x \; dx = e^x + C - 2(\sin x + D) = e^x - 2\sin x + C - 2D$$

istället för

$$\int e^x - 2\cos x \; dx = e^x - 2\sin x + C?$$

Svaret är att detta är lika korrekt: i båda fallen är svaret $e^x - 2\sin x$ plus en allmän reell konstant, och en summa/differens/skalning av allmänna konstanter är också en allmän konstant.

Exempel 4.4.13

Beräkna $\displaystyle\int \cos(3x) \; dx$.

Lösning. Vi vet att $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$. Med kedjeregeln får vi $\dfrac{d}{dx}\sin(3x) = 3\cos(3x)$. Sats 4.9 säger då att $\frac{1}{3}\sin(3x)$ är en primitiv funktion till $\cos(3x)$. Vi kan kontrollera detta direkt med derivering:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}\sin(3x)\right) = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}\cos(3x) = \cos(3x),$$

så

$$\int \cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Exempel 4.4.14

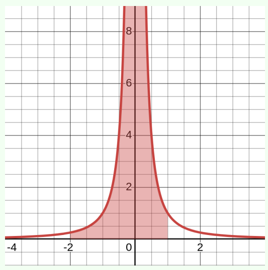
Antag att vi vill beräkna $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$. Enligt tabellen ovan är

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C,$$

så $F(x) = -\dfrac{1}{x}$ en primitiv funktion till $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Sätter vi in gränser så får vi

$$\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = -\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{-2}\right) = -\frac{3}{2}.$$

Analysens huvudsats borde då säga att $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{3}{2}$. Man kan fråga sig om detta kan stämma. Funktionen $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ är ju aldrig negativ, så hur kan integralen vara negativ?



Svaret är att detta inte stämmer. Integralen kan inte beräknas med hjälp av Analysens huvudsats, eftersom satsen endast gäller då *funktionen är kontinuerlig på intervallet.* I detta fall är inte $\frac{1}{x^2}$ kontinuerlig på $[-2, 1]$, eftersom den inte är kontinuerlig (eller ens definierad) i 0. På grund av att $\frac{1}{x^2} \to \infty$ då $x \to 0$ är detta en så kallad *generaliserad integral*, som vi kommer att kunna beräkna lite senare.

4.5 Integrationsteknik: substitution

Vårt mål är nu alltså att integrera så många funktioner som möjligt. Enligt Analysens huvudsats behöver vi därför kunna bestämma primitiva funktioner till, så många funktioner som möjligt. Vi har redan gjort detta till vissa standardfunktioner och summor, differenser, och skalningar av dessa. Man kan fråga sig om det finns en allmän metod för att beräkna $\int f(x)\,dx$, utan att gå vägen via riemannsummor. Svaret är negativt. Att bestämma en primitiv funktion, vilket i någon mening är omvändningen till att derivera, är i allmänhet svårare än att derivera. Vår strategi i de kommande avsnitten kommer att vara att försöka hitta en omvändning till deriveringsregler, som t ex kedjeregeln och produktregeln, för att kunna bestämma primitiva funktioner.

Vi börjar med att hitta en "omvändning" till kedjeregeln och inleder med ett exempel.

Exempel 4.5.1

a) Kedjeregeln ger $\dfrac{d}{dx}\sin(\pi x) = \cos(\pi x)\cdot \pi$, så

$$\int \cos(\pi x)\cdot \pi \; dx = \sin(\pi x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

b) Kedjeregeln ger $\dfrac{d}{dx}\sin(x^2) = \cos(x^2)\cdot 2x$, så

$$\int \cos(x^2)\cdot 2x \; dx = \sin(x^2) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

I exemplet hade vi integraler på formen

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\; dx,$$

där alltså integranden innehåller av en sammansatt funktion $f(g(x))$ multiplicerad med den inre derivatan $g'(x)$. Integranden är alltså precis vad man får när man deriverar en sammansatt funktion med kedjeregeln:

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))\cdot g'(x)$$

så om F är en primitiv funktion till, dvs $F' = f$, är detta precis lika med $f(g(x))\cdot g'(x)$. Vi har alltså

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = f(g(x))\cdot g'(x),$$

så $F(g(x))$ är en primitiv funktion till högerledet, dvs

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = F(g(x)) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Integraler av den typen förekommer ganska ofta. I detta fall visste vi att vi hade startat med $\sin(x^2)$, så vi kunde integrera genom att gå det steget baklänges. För att kunna hantera en sådan integral mer systematiskt inför vi en ny variabel, t ex u, för att beteckna den inre funktionen, så vi sätter

$$u = g(x)$$

vilket innebär att

$$\frac{du}{dx} = g'(x).$$

Skriver vi om likheten ovan med den nya notationen får vi

$$\begin{aligned} \int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx &= \\ \int f(u) \cdot \frac{du}{dx}\, dx &\overset{!}{=} \\ \int f(u) \cdot du & \end{aligned}$$

Den markerade likheten är långt ifrån självklar och behöver motiveras, vilket vi kommer att göra strax. Notera dock att det som hänt är att vi gått från en (krånglig) integral med avseende på den gamla variabeln x till en (lättare) integral med avseende på den nya variabel u. Låt oss tillämpa detta på vårt exempel ovan.

Exempel 4.5.2

Vi vill beräkna

$$\int \cos(x^2) \cdot 2x\, dx.$$

Svårigheten i denna integral kommer av att vi har det krångliga uttrycket x^2 i cos-funktionen. Vi inför därför en ny variabel $u = x^2$

och har då $\dfrac{du}{dx} = 2x$, som vi känner igen i integranden. Vi får

$$\begin{aligned} \int \cos(x^2) \cdot 2x \; dx &= \\ \int \cos(u) \cdot \frac{du}{dx} \; dx &= \\ \int \cos(u) \cdot du. \end{aligned}$$

Detta är nu en integral med avseende på u, som vi enkelt kan beräkna:

$$\int \cos u \; du = \sin u + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Eftersom u är en variabel vi själva introducerat byter vi tillbaka till den gamla variabeln i svaret. Då $u = x^2$ blir svaret alltså

$$\sin(x^2) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Det som hände var, kort sagt, att vi bytte variabel från x till u. Variabelbytet förenklade integralen

$$\int \cos(x^2) \cdot 2x \; dx$$

till

$$\int \cos(u) \; du,$$

som är en enkel standardintegral. Denna integrationsteknik kallas därför för **variabelbyte** eller **substitution**.

Låt nu gå igenom varför den fungerar, dvs varför likheten

$$\int f(u) \cdot \frac{du}{dx} \; dx = \int f(u) \cdot du$$

gäller. Det ser ut som en bråkförkortning $\dfrac{du}{dx} dx = du$, men detta är bara notation: $\dfrac{du}{dx}$ är en derivata och inget bråk, och dx har vi inte hanterat för sig själv. I själva verket är detta en omskrivning av kedjeregeln. Likheten säger alltså att integralen av $f(u)\frac{du}{dx}$ med avseende på x är lika med integralen av $f(u)$ med avseende på u: båda är nämligen $F(u)$, vilket är vad steg 3) säger. För att verifiera detta deriverar vi $F(u)$. Om vi deriverar $F(u)$ med avseende på x får vi komma ihåg att $u = g(x)$ är en funktion av x. Kedjeregeln ger då

$$\frac{d}{dx}F(u) = F'(u) \cdot \frac{du}{dx} = f(u) \cdot \frac{du}{dx}.$$

Om vi istället deriverar $F(u)$ med avseende på u är u vår variabel, så

$$\frac{d}{du}F(u) = F'(u) = f(u).$$

Detta innebär att $F(u)$ å ena sidan är en primitiv funktion till $f(u)\dfrac{du}{dx}$ med avseende på x, och å andra sidan en primitiv funktion till $f(u)$ med avseende på u, dvs

$$\int f(u) \cdot \frac{du}{dx}\, dx = F(u) + C = \int f(u) \cdot du.$$

Exempel 4.5.3

Beräkna $\displaystyle\int \sqrt{e^x + 2}\; e^x\, dx$.

Lösning. Vi noterar att uttrycket $e^x + 2$ under rottecknet vållar svårigheter och vill genomföra variabelbytet $u = e^x + 2$. Derivatan $\dfrac{du}{dx} = e^x$ ingår som faktor i integranden, vilket innebär att vi kan göra detta variabelbyte. När vi redovisar beräkningarna är det vanligt att skriva in variabelbytet i en ruta eller tankebubbla. Vi får

$$\int \sqrt{e^x + 2}\; e^x\, dx = \boxed{\begin{array}{l} u = e^x + 2 \\ \dfrac{du}{dx} = e^x \\ du = e^x\, dx \end{array}} = \int \sqrt{u}\, du.$$

(Notera att den sista raden i rutan är $du = \dfrac{du}{dx}dx$; att skriva ut detta hjälper oss att se vad som ska ersättas med du.)

Nu är substitutionen klar och vi kan integrera med avseende på u. Vi har

$$\int \sqrt{u}\, du = \int u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}u^{3/2} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Slutligen byter vi tillbaka till den gamla variabeln i svaret.

Svar. $\displaystyle\int \sqrt{e^x+2}\; e^x \; dx = \frac{2}{3}(e^x+2)^{3/2} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

Man kan sammanfatta detta som följer.

Idé

Variabelbytet $u = g(x)$ kan förenkla integralen genom att ersätta ett krångligt uttryck $g(x)$ med en ny variabel. För att detta ska vara möjligt måste derivatan $\dfrac{du}{dx} = g'(x)$ finnas som faktor i integranden. Kedjeregeln kan formuleras som $\dfrac{du}{dx}dx = du$, vilket ger en integral med avseende på u.

Anmärkning 4.5.4: Fördjupning: vad är dx och du?

I variabelbytet förekommer likheten $\dfrac{du}{dx}dx = du$ innanför integralen. Detta har vi motiverat med kedjeregeln, vilket är matematiskt korrekt. Vi har inte arbetat med uttryck av typen dx och du (så kallade *differentialer*) förutom innanför integraler. Det finns en precis teori för sådana uttryck, som vi inte kommer att gå igenom här. Informellt kan man tänka på dx som en *infinitesimal (dvs "försvinnande liten") förändring i* x, och på samma sätt är du en infinitesimal förändring i u. Derivatan $\dfrac{du}{dx}$ blir då en omvandlingsfaktor mellan förändringen i x-led och förändringen i u-led. Likheten $\dfrac{du}{dx}dx = du$ fås då från den faktiska bråkförkortningen

$$\frac{\Delta u}{\cancel{\Delta x}}\cancel{\Delta x} = \Delta u$$

genom att låta $\Delta x \to 0$. Att derivatan $\dfrac{du}{dx}$ är gränsvärdet av bråket $\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ vet vi sedan tidigare; det nya är att man genom precisa definitioner kan motivera hur denna gränsvärdesprocess tar Δx och Δu till dx och du.

I fysiken använder man ofta sådana differentialer för att uttrycka olika samband. Låt oss titta på en partikel som rör sig med hastighet

$v(t)$ längs en linje. Sambandet mellan sträckan s och tiden t skrivs ofta som

$$ds = v(t)\ dt.$$

Detta ska tolkas som att en liten förändring av sträckan ges av hastigheten gånger en liten förändring av tiden. När man behöver räkna på detta sätter man in det i lämpliga integraler. Om partikeln står vid position s_0 vid tiden t_0, och vid position s_1 vid tiden t_1, får vi

$$\int_{s_0}^{s_1} ds = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\ dt.$$

Eftersom vänsterledet är precis $s_1 - s_0$ är detta precis som i Exempel 2.1.11.

Exempel 4.5.5

Beräkna $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\ dx.$

Lösning. Vi gör variabelbytet $u = x^2 + 1$. Då är $\dfrac{du}{dx} = 2x$. Vi har inte $2x$, utan bara x, som faktor i integranden. En sådan skillnad på en konstant faktor kan vi dock enkelt åtgärda, eftersom

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 2x}{x^2+1}.$$

Integralen blir därför

$$\int \frac{\frac{1}{2}\cdot 2x}{x^2+1}\ dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x^2+1} 2x\ dx = \boxed{\begin{array}{l} u = x^2+1 \\ \dfrac{du}{dx} = 2x \\ du = 2x\ dx \end{array}} = \int \frac{\frac{1}{2}}{u} du.$$

Genom att flytta ut konstanten framför integralen ser vi att detta är lika med

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\ du = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Eftersom $x^2 + 1 \geq 0$ behövs dessutom inte beloppstecknet.

När man beräknat en primitiv funktion, särskilt om det är en invecklad beräkning, *kan och bör man alltid kontrollera svaret* genom att derivera. Kedjeregeln ger

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}2x+0=\frac{x}{x^2+1}.$$

Derivatan av resultatet är alltså den funktion vi började med, vilket betyder att resultatet verkligen är en primitiv funktion.

Variabelbyte är en användbar metod även om det inte är uppenbart att man har en " uthoppad inre derivata" $\frac{du}{dx}$ i integranden, som nästa exempel visar.

Exempel 4.5.6

Beräkna $\displaystyle\int \tan x\;dx$.

Lösning. Vi använder oss av att $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, så

$$\int \tan x\;dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}\;dx=\int\frac{1}{\cos x}\sin x\;dx.$$

Vi kan nu göra substitutionen $v=\cos x$, eftersom derivatan $\dfrac{dv}{dx}=-\sin x$ (nästan) är en faktor i integranden. Minustecknet (dvs konstanten -1) kan vi kompensera på samma sätt som konstanten 2 i förra exemplet. Vi får

$$\int\frac{1}{\cos x}\sin x\;dx=\boxed{\begin{array}{l} v=\cos x\\ \dfrac{dv}{dx}=-\sin x\\ dv=-\sin x\;dx\\ -dv=\sin x\;dx\end{array}}=\int\frac{1}{v}(-1)\;dv=-\int\frac{1}{v}\;dv.$$

Denna integral är lika med

$$-\ln|v|+C=-\ln|\cos x|+C,\qquad C\in\mathbb{R}.$$

Svar. $\displaystyle\int \tan x\;dx=-\ln|\cos x|+C,\qquad C\in\mathbb{R}.$

Med hjälp av substitution kan man beräkna varianter av standardintegralerna. Vi tar upp två exempel.

Exempel 4.5.7

Beräkna

a) $\displaystyle\int e^{3x+1}\,dx,$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx,$

där $a \neq 0$ är en reell konstant.

a) Vi har

$$\int e^{3x+1}\,dx = \boxed{\begin{array}{l} t = 3x+1\ dx \\ \dfrac{dt}{dx} = 3 \\ dt = 3\ dx \\ \frac{1}{3}dt = dx \end{array}} = \int \tfrac{1}{3}e^t dt = \tfrac{1}{3}e^t + C,$$

och byter vi tillbaka till den ursprungliga variabeln är detta lika med $= \frac{1}{3}e^{3x+1} + C$, där $C \in \mathbb{R}$. (Notera att $dt = 3\ dx$, så vi har samma problem med en konstant faktor som i Exempel 4.5.5. Vi multiplicerade båda sidor med $\frac{1}{3}$, vilket fungerar eftersom det vi multiplicerar med är konstant.)

b) Här kan vi använda oss av standardintegralen

$$\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan t + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

För att göra detta behöver vi skriva om integralen så att nämnaren är på formen $(\ldots)^2 + 1$. Vi har

$$\frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2\left(\frac{x^2}{a^2}+1\right)} = \frac{1}{a^2}\frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}.$$

Vår integral är alltså lika med

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\,dx \quad &= \boxed{\begin{array}{l} t = \frac{x}{a}\ dx \\ \dfrac{dt}{dx} = \frac{1}{a} \\ dt = \frac{1}{a}\ dx \\ a\ dt = dx \end{array}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a}{t^2+1}\,dt \\ &= \frac{1}{a}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{a}\arctan t + C \\ &= \frac{1}{a}\arctan(\tfrac{x}{a}) + C, \qquad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Om man använder variabelbyte för att beräkna bestämda integraler kan man göra på två olika sätt: endera byter man tillbaka till den gamla variabeln innan man sätter in gränserna, eller så räknar man ut nya gränser i den nya variabeln. Vi illustrerar detta i nästa exempel.

Exempel 4.5.8

För att beräkna $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx$ gör vi ett variabelbyte med den nya variabeln $v = x^3 + 1$. Derivatan $\dfrac{dv}{dx} = 3x^2$ finns som faktor i integranden. Vi kan böra på två sätt:

Metod 1: byta tillbaka till den gamla variabeln. Vi har

$$\int_0^1 \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx = \boxed{\begin{array}{l} v = x^3+1 \\ \dfrac{dv}{dx} = 3x^2 \\ dv = 3x^2\,dx \end{array}} = \int_{x=0}^{x=1} \frac{1}{v}\,dv = (\ln|v|)\Big|_{x=0}^{x=1}.$$

I notationen har vi förtydligat att gränserna gäller variabeln x, vilket annars inte är uppenbart eftersom vi bytt variabel till v. Innan vi sätter in gränserna måste vi alltså byta tillbaka till variabeln x:

$$(\ln|v|)\Big|_{x=0}^{x=1} = \big(\ln|x^3+1|\big)\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Metod 2: uttrycka gränserna i den nya variabeln. Det är ofta smidigare att räkna ut vad gränserna måste bli i den nya variabeln. Med $v = x^3 + 1$ svarar den nedre gränsen $x = 0$ mot $v = 0^3 + 1 = 1$ och den övre gränsen $x = 1$ mot $v = 1^3 + 1 = 2$. Vi tar med detta och får

$$\int_0^1 \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx = \boxed{\begin{array}{l} v = x^3+1 \\ \dfrac{dv}{dx} = 3x^2 \\ dv = 3x^2\,dx \\ x=0 \Rightarrow v=1 \\ x=1 \Rightarrow v=2 \end{array}} = \int_1^2 \frac{1}{v}\,dv = (\ln|v|)\Big|_1^2.$$

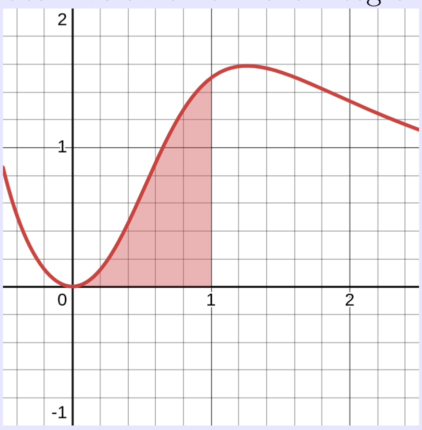
Nu kan vi direkt sätta in gränserna och få att detta är lika med $\ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

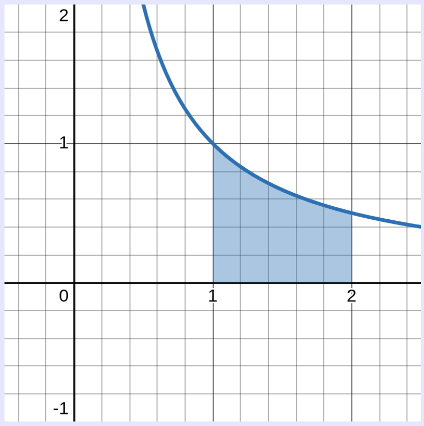
Anmärkning 4.5.9

Låt oss titta geometriskt på vad Metod 2 i exemplet ovan innebär. Variabelbytet gav oss likheten

$$\int_0^1 \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{v}\,dv.$$

Den vänstra integralen ger oss arean under grafen i figuren till vänster, där vi ritat in $y = \dfrac{3x^2}{x^3+1}$ i xy-planet. Variabelbytet transformerar den vänstra bilden till den högra. Där har vi ritat in $y = \dfrac{1}{v}$ i vy-planet. Likheten innebär att areorna är lika stora. Vi bestämde alltså arean till vänster genom att räkna ut arean till höger, som beskrivs av en enklare integral.





4.6 Integrationsteknik: partiell integration

I det förra avsnittet gick vi igenom variabelsubstitution, som i princip gick ut på att vända på kedjeregeln för derivering. Nästa integrationsteknik fås genom att istället vända på produktregeln för derivering. Den är framförallt användbar för att integrera produkter. Låt oss närma oss detta med ett exempel.

Exempel 4.6.1

Låt oss derivera $\sin(x) \cdot x$ med hjälp av produktregeln:

$$\frac{d}{dx}(\sin(x) \cdot x) = \cos(x) \cdot x + \sin(x) \cdot 1.$$

Att högerledet är derivatan av $\sin(x) \cdot x$ kan vi uttrycka som att $\sin(x) \cdot x$ är en primitiv funktion till högerledet, dvs

$$\sin(x) \cdot x + C = \int \cos(x) \cdot x \, dx + \int \sin(x) \cdot 1 \, dx, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Vi flyttar om termerna och får

$$\int \cos(x) \cdot x \, dx = \sin(x) \cdot x + C - \int \sin(x) \cdot 1 \, dx.$$

Detta är till stor hjälp om vi vill räkna ut $\int \cos(x) \cdot x \, dx$: likheten säger nämligen att denna integral är lika med $\sin(x) \cdot x + C$, minus den (betydligt enklare) integralen $\int \sin(x) \cdot 1 \, dx = \int \sin(x) \, dx$. Fullföljer vi räkningen får vi

$$\begin{aligned}
\int \cos(x) \cdot x \, dx &= \sin(x) \cdot x + C - \int \sin(x) \cdot 1 \, dx \\
&= \sin(x) \cdot x + C - (-\cos(x) + D) \\
&= \sin(x) \cdot x + \cos(x) + (C - D),
\end{aligned}$$

där $C, D \in \mathbb{R}$. Eftersom C och D är allmänna konstanter kan vi döpa om $C - D$ till E enligt resonemanget i Anmärkning 4.4.12. Sammantaget får vi

$$\int \cos(x) \cdot x \, dx = \sin(x) \cdot x + \cos(x) + E, \qquad E \in \mathbb{R}.$$

Vi kan göra detta till ett allmänt resonemang för att härleda en formel för $\int f(x)g(x) \, dx$: om F är en primitiv funktion till f, kan vi börja med att derivera $F(x) \cdot g(x)$ enligt produktregeln:

$$\frac{d}{dx}(F(x) \cdot g(x)) = F'(x) \cdot g(x) + F(x) \cdot g'(x),$$

förutsatt att g är deriverbar. Detta betyder alltså att $F(x) \cdot g(x)$ är en primitiv funktion till högerledet, dvs

$$F(x) \cdot g(x) + C = \int F'(x) \cdot g(x)\, dx + \int F(x) \cdot g'(x)\, dx, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

En omflyttning av termerna ger

$$\int F'(x) \cdot g(x)\, dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x)\, dx.$$

Att vi inte skriver ut $+C$ i högerledet beror på att det redan finns en allmän konstant i högerledet, nämligen den som ingår i den obestämda integralen där. (Jämför med exemplet där vi till slut slog samman alla konstanter till en.) Eftersom $F' = f$ pga att F är en primitiv funktion till f, har vi alltså härlett att

$$\boxed{\int f(x) \cdot g(x)\, dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x)\, dx}$$

förutsatt att g är deriverbar. Denna integrationsteknik kallas för **partiell integration**.

Anmärkning 4.6.2

Partiell integration är alltså en teknik för att integrera $\int f(x) \cdot g(x)\, dx$. Namnet kommer av att man inte har integrerat fullständigt, eftersom man har kvar integralen $\int F(x) \cdot g'(x)\, dx$ att beräkna. För att komma dit integrerar vi ena faktorn $f(x)$ till $F(x)$ och deriverar den andra faktorn $g(x)$ till $g'(x)$. Metoden är därför främst användbar om denna kvarvarande integral är enklare att hantera än integralen man startade med.

Exempel 4.6.3

Låt oss återbesöka $\int \cos(x) \cdot x\, dx$ mer systematiskt. I produkten $\cos(x) \cdot x$ väljer vi att integrera $\cos x$ till $\sin x$, vilket vi markerar med en pil uppåt, och derivera x till 1, vilket vi markerar med en pil nedåt. Vi har

$$\begin{aligned}
\int \overset{\overset{\sin x}{\uparrow}}{\cos(x)} \cdot \underset{\underset{1}{\downarrow}}{x}\, dx &= \sin(x) \cdot x - \int \sin(x) \cdot 1\, dx \\
&= \sin(x) \cdot x - (-\cos x) + C \\
&= x \sin x + \cos x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Notera vad som händer med $g(x) = x$ i det första steget: i den färdigintegrerade termen ingår $g(x) = x$ själv, men i integralen är det derivatan $g'(x) = 1$ som ingår. Notera också att vi skrev konstanten C utanför parentesen. Detta beror på att det inte spelar någon roll om vi skriver $-C$ eller $+C$ när C är en allmän konstant som kan anta vilket reellt värde som helst.

Vi fortsätter med ytterligare ett par exempel.

Exempel 4.6.4

Beräkna $\displaystyle\int (2x+1)e^x\, dx$.

Lösning. I produkten $(2x+1)e^x$ väljer vi att derivera $2x+1$ och integrera e^x . Vi får

$$\begin{aligned}
\int \underset{\underset{2}{\downarrow}}{(2x+1)} \overset{\overset{e^x}{\uparrow}}{e^x}\, dx &= (2x+1)e^x - \int 2e^x\, dx \\
&= (2x+1)e^x - (2e^x) + C \\
&= (2x-1)e^x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Exempel 4.6.5

Beräkna $\displaystyle\int x \ln x\, dx$.

Lösning. I produkten $x \ln x$ väljer vi att integrera x och derivera $\ln x$. Vi får

$$\int \overset{\overset{\frac{x^2}{2}}{\uparrow}}{x} \underset{\underset{\frac{1}{x}}{\downarrow}}{\ln x}\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Anmärkning 4.6.6: Välja fritt är stort, välja rätt är större!

I den partiella integrationen har man alltså ett val att göra: vilken funktion ska integreras och vilken ska deriveras. En tumregel är att integrera sådant som är enkelt att integrera (som t ex $\sin x$, $\cos x$ och e^x) och derivera sådant som är svårt att integrera (som t ex $\ln x$ och $\arctan x$). Polynom, som t ex x, intar en mellanställning. De är lättare att integrera än t ex $\ln x$ men har mer komplicerade primitiva funktioner jämfört med t ex e^x och $\cos x$. Detta motiverar våra val i exemplen ovan.

Partiell integration kan även användas till integraler där integranden inte är en produkt på ett uppenbart sätt: man kan alltid skriva $f(x)$ som $1 \cdot f(x)$, integrera 1 och derivera $f(x)$. Vi använder detta för att integrera $\ln x$.

Exempel 4.6.7

För att beräkna $\displaystyle\int \ln x\, dx$ skriver vi detta som $\displaystyle\int 1 \cdot \ln x\, dx$ och använder partiell integration:

$$\begin{aligned}
\int \overset{x}{\overset{\uparrow}{1}} \cdot \underset{\frac{1}{x}}{\underset{\downarrow}{\ln x}}\; dx &= x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx \\
&= x\ln x - \int 1\, dx \\
&= x\ln x - x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Vi avslutar med exempel på svårigheter som kan uppstå.

Exempel 4.6.8

Beräkna $\displaystyle\int x^2 e^x\, dx.$

Lösning. Vi deriverar x^2 och integrerar e^x . Vi får

$$\int \underset{2x}{\underset{\downarrow}{x^2}} \overset{e^x}{\overset{\uparrow}{e^x}}\, dx = x^2 e^x - \int \underset{2}{\underset{\downarrow}{2x}} \overset{e^x}{\overset{\uparrow}{e^x}}\, dx$$

(Den nya integranden är en produkt — partiell integration igen!)

$$\begin{aligned}
&= x^2 e^x - \left(2xe^x - \int 2e^x\, dx \right) \\
&= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x \\
&= (x^2 - 2x + 2)e^x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

I detta exempel upprepade vi alltså den partiella integrationen tills vi fick bort alla potenser av x. När man upprepar partiell integration är det viktigt att vara konsekvent med vad man deriverar och vad man integrerar: om man byter riskerar man att göra det man räknat ogjort.

Exempel 4.6.9

Beräkna $\displaystyle\int \sin x\; e^x\, dx.$

Lösning. Vi använder partiell integration. Vi väljer att integrera exponentialfunktionen och derivera den trigonometriska funktionen.

$$\int \underset{\substack{\downarrow \\ \cos x}}{\sin x}\, \overset{\substack{e^x \\ \uparrow}}{e^x}\, dx \;=\; \sin x e^x - \int \underset{\substack{\downarrow \\ -\sin x}}{\cos x}\, \overset{\substack{e^x \\ \uparrow}}{e^x}\, dx$$

(Den nya integranden är en produkt — partiell integration igen!)

$$\begin{aligned} &= \sin x e^x - \left(\cos x e^x - \int -\sin x e^x \, dx\right) \\ &= \sin x e^x - \cos x e^x - \int \sin x e^x \, dx \end{aligned}$$

Nu fick vi integralen vi började med i högerledet. Vi har alltså

$$\int \sin x e^x \, dx = \sin x e^x - \cos x e^x - \int \sin x e^x \, dx,$$

och adderar vi integralen till båda led får vi

$$2\int \sin x e^x \, dx = \sin x e^x - \cos x e^x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

(Den allmänna konstanten, som var inbakad i integralen i högerledet, måste nu skrivas ut när det inte finns några obestämda integraler kvar i högerledet.) Division med 2 ger slutligen

$$\int \sin x e^x \, dx = \frac{\sin x e^x - \cos x e^x + C}{2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Därmed har vi bestämt vår integral. Vi kan göra en sista förenkling genom att kalla $\frac{C}{2}$ för D, så

$$\int \sin x \; e^x \, dx = \frac{\sin x \; e^x - \cos x e^x}{2} + D, \qquad D \in \mathbb{R}.$$

Om man kontrollderiverar detta (gör gärna det!) får man mycket riktigt $\sin x \; e^x$.

4.7 Integrationsteknik: partialbråksuppdelning

I detta avsnitt kommer vi att arbeta med integraler av **rationella funktioner**, dvs kvoter av polynom. Målet är att kunna beräkna

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

där $P(x)$ och $Q(x)$ är polynom. I detta ingår en användbar teknik: partialbråksuppdelning, som vi strax kommer att gå igenom. Vi börjar med några grundläggande exempel som sedan kommer att vara byggstenarna i denna teknik.

Exempel 4.7.1

Beräkna

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x+a}\,dx,$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx,$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+a^2}\,dx,$ d) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+a)^2}\,dx,$

där a är en reell konstant.

Lösning.

a) På samma sätt som i Exempel 4.4.10 får vi

$$\int \frac{1}{x+a}\,dx = \ln|x+a| + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

(Mer precist kan man använda substitutionen $u = x + a$, och notera att $du = dx$ eftersom den inre derivatan $\frac{du}{dx} = 1$. Vi lämnar detta som övning.)

b) Om $a = 0$ är detta en standardintegral och lika med $-\frac{1}{x} + C$ där $C \in \mathbb{R}$. Om $a \neq 0$ vet vi från Exempel 4.5.7 att

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

c) Vi kan beräkna denna integral som i Exempel 4.5.5, men med substitutionen $u = x^2 + a^2$ istället för $u = x^2 + 1$. Vi lämnar detaljerna som övning, och får

$$\int \frac{x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)+C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

d) Vi använder substitutionen $u = x+a$. Eftersom $\frac{du}{dx} = 1$ får vi $du = dx$, så

$$\int \frac{1}{(x+a)^2}\,dx = \int \frac{1}{u^2}\,du = \int u^{-2}\,du = \frac{u^{-1}}{-1}+C = -\frac{1}{u}+C,$$

vilket är lika med $-\dfrac{1}{x+a}+C$ där $C \in \mathbb{R}$.

(Vi lämnar det som övning att på liknande sätt beräkna $\displaystyle\int \frac{1}{(x+a)^r}\,dx$, där nu $r > 1$ är en reell konstant.)

Därmed kan vi t ex beräkna

$$\int \frac{7x+3}{x^2+1}\,dx = \frac{7}{2}\ln(x^2+1)+3\arctan x + C, \qquad C \in \mathbb{R},$$

genom att dela upp

$$\frac{7x+3}{x^2+1} = 7\frac{x}{x^2+1}+3\frac{1}{x^2+1}$$

och använda exemplet ovan.

Om vi istället vill beräkna

$$\int \frac{7x+3}{x^2-1}\,dx$$

behöver vi en ny metod: partialbråksuppdelning, som vi kommer att gå igenom nu. Vi observerar först att vi kan faktorisera nämnaren $x^2-1 = (x+1)(x-1)$. Vi gör ansatsen

$$\frac{7x+3}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}.$$

Att det är en ansats innebär att det är en (förhoppningsfull) gissning. Om ansatsen stämmer, och om vi lyckas bestämma A och B, är vår integral lika med

$$\begin{aligned}\int \frac{7x+3}{(x+1)(x-1)}\,dx &= \int \frac{A}{x+1}\,dx + \int \frac{B}{x-1}\,dx \\ &= A\int \frac{1}{x+1} + B\int \frac{1}{x-1}\,dx \\ &= A\ln|x+1| + B\ln|x-1| + C, \qquad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

För att verifiera ansatsen och bestämma A och B, skriver vi högerledet på gemensamt bråkstreck.

$$\begin{aligned}\frac{{\color{blue}7}x+{\color{red}3}}{(x+1)(x-1)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \\ &= \frac{A(x-1)+B(x-1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{{\color{blue}(A+B)}x + {\color{red}A-B}}{(x+1)(x-1)}.\end{aligned}$$

I det sista steget har vi grupperat koefficienterna framför x för sig, och de konstanta termerna för sig. Ansatsen säger alltså att denna likhet gäller för alla värden på x (utom $x = \pm 1$ då nämnaren är 0). Detta gäller om och endast om motsvarande koefficienter är lika, dvs

$${\color{blue}A+B=7} \quad \text{och} \quad {\color{red}A-B=3}.$$

Detta ekvationssystem har lösningen $A = 5$ och $B = 2$. Ansatsen gäller alltså med dessa värden på A och B, och beräkningen ovan ger

$$\begin{aligned}\int \frac{7x+3}{(x+1)(x-1)}\,dx &= \int \frac{5}{x+1}\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx \\ &= 5\ln|x+1| + 2\ln|x-1| + C, \qquad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Denna metod kallas för **partialbråksuppdelning (PBU)**. Vår **PBU-ansats** ovan går alltså ut på att skriva om bråket som en summa av enklare bråk, som vi sedan kan integrera.

Exempel 4.7.2

Beräkna $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2-5x+6}\,dx$.

Lösning. Vi faktoriserar nämnaren (exempelvis genom att bestämma dess nollställen med lämplig metod för lösning av andragradsekvationer, och använda faktorsatsen) och får $x^2 - 5x + 6 =$

$(x-2)(x-3)$. Vi söker alltså

$$\int \frac{x+4}{(x-2)(x-3)}\,dx$$

och gör PBU-ansatsen

$$\frac{x+4}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}.$$

Skriver vi högerledet på gemensamt bråkstreck får vi

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{(A+B)x - 3A - 2B}{(x-2)(x-3)}.$$

Täljaren är lika med $x+4$ om och endast om

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -3A-2B=4 \end{cases} \iff \cdots \iff \begin{cases} A=-6 \\ B=7 \end{cases}$$

Sammantaget är

$$\begin{aligned} \int \frac{x+4}{(x-2)(x-3)}\,dx &= \int \frac{-6}{x-2}\,dx + \int \frac{7}{x-3}\,dx \\ &= -6\ln|x-2| + 7\ln|x-3| + C, \qquad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Har vi fler faktorer i nämnaren gör vi på liknande sätt.

Exempel 4.7.3

För att beräkna $\int \frac{2x^2+3x-8}{x(x^2-4)}\,dx$, noterar vi att nämnaren faktoriseras som

$$x(x^2-4) = x(x+2)(x-2)$$

och vi gör därför partialbråksuppdelningen

$$\frac{2x^2+3x-8}{x(x^2-4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}.$$

För att verifiera ansatsen och bestämma konstanterna A, B och C

skriver vi högerledet på gemensamt bråkstreck:

$$\begin{aligned}\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-2} &= \frac{A(x+2)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+2)}{x(x+2)(x-2)} \\ &= \frac{Ax^2-4A+Bx^2-2Bx+Cx^2+2Cx}{x(x+2)(x-2)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^2+(2C-2B)x-4A}{x(x+2)(x-2)}.\end{aligned}$$

Detta är lika med $\dfrac{2x^2+3x-8}{x(x+2)(x-2)}$ om och endast om

$$\begin{cases} A+B+C=2 \\ 2C-2B=3 \\ -4A=-8 \end{cases} \iff \cdots \iff \begin{cases} A=2 \\ B=-\frac{3}{4} \\ C=\frac{3}{4} \end{cases}.$$

Därmed är

$$\int \frac{2x^2+3x-8}{x(x^2-4)}\,dx = \int \frac{2}{x}\,dx - \int \frac{3/4}{x+2}\,dx + \int \frac{3/4}{x-2}\,dx$$

vilket är lika med $2\ln|x| - \frac{3}{4}\ln|x+2| + \frac{3}{4}\ln|x-2| + D$, där $D \in \mathbb{R}$.

Nu när vi har grunden i PBU kan vi utvidga den till mer komplicerade situationer.

Irreducibla andragradsfaktorer i nämnaren

Det är inte alltid man kan faktorisera nämnaren i reella förstagradsfaktorer.

Exempel 4.7.4

Polynomen x^2+4 och $x^2+2x+10$ saknar reella rötter. Enligt faktorsatsen kan de inte faktoriseras i förstagradsfaktorer. Man säger att de är **irreducibla reella polynom**. Man kan förvisso faktorisera dem i komplexa faktorer, t ex

$$x^2+4=(x+2i)(x-2i)$$

där i är den imaginära enheten, men vi undviker detta eftersom vi enbart definierat derivator och integraler av reellvärda funktioner.

Däremot vet vi från algebran att varje reellt polynom kan skrivas som en produkt av faktorer av grad 1 eller 2. I exemplen ovan lärde vi oss hantera faktorer av grad 1, och nu utvidgar vi detta till faktorer av grad 2. Vi illustrerar med ett exempel.

Exempel 4.7.5

Beräkna $\displaystyle\int \frac{5x^2+3x+12}{x(x^2+4)}\,dx$.

Lösning. Nämnaren kan inte faktoriseras mer. Om vi gör ansatsen

$$\frac{5x^2+3x+12}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2+4}$$

och sätter högerledet på gemensamt bråkstreck, får vi

$$\frac{5x^2+3x+12}{x(x^2+4)} = \frac{Ax^2+Bx+4A}{x(x^2+4)}.$$

För att detta ska gälla för alla x måste å ena sidan koefficienterna framför x^2 vara lika, dvs $A=5$, och å andra sidan de konstanta termerna vara lika, dvs $4A=12$. Dessa två likheter motsäger varandra, och ansatsen är därför ogiltig. Vi gör istället ansatsen

$$\frac{5x^2+3x+12}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Om vi nu skriver högerledet på gemensamt bråkstreck får vi efter förenkling

$$\frac{5x^2+3x+12}{x(x^2+4)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+4A}{x(x^2+4)},$$

där motsvarande koefficienter är lika om och endast om $A=3$, $B=2$ och $C=3$. Alltså är

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2+3x+12}{x(x^2+4)}\,dx &= \int \frac{3}{x}\,dx + \int \frac{2x+3}{x^2+4}\,dx \\ &= 3\ln|x| + \int \frac{2x}{x^2+4}\,dx + \int \frac{3}{x^2+4}\,dx.\end{aligned}$$

Dessa integraler är precis av den typ vi såg i Exempel 4.7.1 (med $a = 2$). Använder vi detta får vi att ovanstående är lika med

$$3\ln|x| + \ln(x^2+4) + \tfrac{3}{2}\arctan\tfrac{x}{2} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Anmärkning 4.7.6

Varför behövde vi ändra vår ansats? Med bara $\frac{B}{x^2+4}$ hade vi för få fria parametrar att anpassa. I slutet av avsnittet kommer vi att återkomma till frågan och relatera det till graden hos täljare och nämnare i den ursprungliga integranden.

Exempel 4.7.7

För att beräkna $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+10}\,dx$ noterar vi först att nämnaren saknar reella rötter och därför inte kan faktoriseras. Vi kvadratkompletterar därför

$$x^2+2x+10 = \underbrace{x^2+2x+\left(\frac{2}{2}\right)^2}_{(x+1)^2} - \left(\frac{2}{2}\right)^2 + 10 = (x+1)^2+9.$$

Vi kan nu beräkna integralen med hjälp av substitutionen $u = x+1$:

$$\int \frac{1}{(x+1)^2+9}\,dx = \boxed{\begin{array}{l} u = x+1 \\ \dfrac{du}{dx} = 1 \\ du = dx \end{array}} = \int \frac{1}{u^2+9}\,du = \tfrac{1}{3}\arctan\tfrac{u}{3} + C,$$

där vi beräknat integralen enligt Exempel 4.7.1 med $a = 3$. Uttryckt i den gamla variabeln har vi alltså sammantaget

$$\int \frac{1}{x^2+2x+10}\,dx = \tfrac{1}{3}\arctan\tfrac{x+1}{3} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Dubbelrötter

Om nämnaren har en dubbelrot, så att faktoriseringen innehåller någon faktor upprepade gånger, måste man göra en särskild ansats.

Exempel 4.7.8

Antag att vi vill integrera

$$\frac{2x+1}{(x+1)^2} = \frac{2x+1}{(x+1)(x+1)}.$$

Ansatsen

$$\frac{2x+1}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+1}$$

fungerar inte, eftersom högerledet ju är lika med $\frac{A+B}{x+1}$, vilket inte är lika med vänsterledet oavsett vad A och B är. (Vi kan se detta tydligare genom att förlänga med $x+1$. Högerledet är då lika med

$$\frac{(A+B)x + A + B}{(x+1)^2},$$

dvs koefficienten framför x är lika med den konstanta termen i täljaren, vilket inte är fallet i vänsterledet.) Istället gör vi ansatsen

$$\frac{2x+1}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}.$$

Sätter vi högerledet på gemensamt bråkstreck får vi

$$\frac{2x+1}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2} = \frac{Ax+A+B}{(x+1)^2}.$$

Jämförelse av koefficienter ger nu att detta gäller om och endast om $A = 2$ och $B = -1$. Vi har alltså

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x+1}{(x+1)^2}\,dx &= \int \frac{2}{x+1}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx \\
&= 2\ln|x+1| - \int (x+1)^{-2}\,dx \\
&= 2\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(Den sista integralen såg vi i Exempel 4.4.10.)

Exempel 4.7.9

På liknande sätt kan man beräkna $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+5}{(x+2)^3}\,dx$ med hjälp av ansatsen

$$\frac{x^2+2x+5}{(x+2)^3} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3}.$$

Vi lämnar detaljerna som övning.

Sammanfattning av partialbråksuppdelning

Vi kan nu sammanfatta det som vi kommit fram till så långt.

Idé

För att integrera $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, där $P(x)$ och $Q(x)$ är polynom och $P(x)$ *har lägre grad än* $Q(x)$, faktoriserar vi $Q(x)$ i faktorer av grad 1 och 2. Vi gör sedan ansatsen att $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ är en summa av följande termer:

- för varje faktor $x+a$ tar vi med en term på formen $\dfrac{A}{x+a}$, och
- för varje irreducibel faktor x^2+bx+c av grad 2 tar vi med en term på formen $\dfrac{Bx+C}{x^2+bx+c}$.

Om någon faktor upprepas n gånger, tar vi med n termer av växande exponent i nämnaren. Sammanfattningsvis har vi alltså

- för varje upprepad faktor $(x+a)^n$, termer på formen
$$\frac{A_1}{x+a} + \frac{A_2}{(x+a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x+a)^n},$$
- för varje upprepad faktor $(x^2+bc+x)^n$, termer på formen
$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+bc+x} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bc+x)^2} + \cdots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+bc+x)^n}.$$

Konstanterna kan bestämmas genom att skriva summan i ansatsen på gemensamt bråkstreck och jämföra koefficienter framför varje potens av x i täljaren.

Observera att termer med nämnare på formen $(x^2+bx+c)^n$, där $n > 1$, är något svåra att integrera och kommer inte att ingå i denna kurs.

Exempel 4.7.10

För att integrera

$$\frac{x^4+3x^3-2x+1}{x(x+1)(x-2)^3(x^2+2x+5)}$$

gör vi ansatsen

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{(x-2)^2}+\frac{E}{(x-2)^3}+\frac{Fx+G}{x^2+2x+5}$$

där A, B, C, D, E, F, G är konstanter som kan bestämmas genom att sätta högerledet på gemensamt bråkstreck och jämföra koefficienter.

För att detta ska fungera krävde vi alltså att täljaren $P(x)$ har lägre grad än nämnaren $Q(x)$. Detta beror på att alla termer i ansatsen har den egenskapen, och när vi skriver högerledet på gemensamt bråkstreck kommer vi därför inte kunna ha en täljare med samma grad som nämnaren, eller högre. För att hantera detta använder vi polynomdivision, som vi visar i nästa exempel.

Exempel 4.7.11

För att integrera $\dfrac{x^3+2x^2+1}{x^2+1}$, dividerar vi täljare med nämnare:

$$\begin{array}{rl}
 & x+2 \\
\cline{2-2}
 & x^3+2x^2+1 \,\big|\, \underline{x^2+1} \\
-(x^3+x) & \\
\hline
 & 2x^2-x+1 \\
-(2x^2+2) & \\
\hline
 & -x-1
\end{array}$$

vilket alltså ger kvoten $x+2$ och resten $-x-1$. Vi har alltså

$$x^3+2x^2+1=(x+2)(x^2+1)+(-x-1)$$

och därmed

$$\frac{x^3+2x^2+1}{x^2+1}=\frac{(x+2)\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{x^2+1}}+\frac{(-x-1)}{x^2+1}=x+2-\frac{(x+1)}{x^2+1}.$$

Högerledet består nu av polynomet $x + 2$ och den rationella funktionen $\frac{(x+1)}{x^2+1}$, där täljaren har lägre grad än nämnaren och vi kan använda partialbråksuppdelning för att integrera den.

I det allmänna fallet leder en polynomdivision där $P(x)$ divideras med $Q(x)$ alltid till att

$$P(x) = K(x)Q(x) + R(x)$$

där resten $R(x)$ är noll eller har lägre grad än $Q(x)$, så vi får

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = K(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

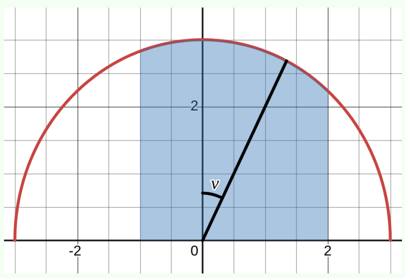
där kvoten $K(x)$ är något polynom, och partialbråksuppdelning kan tillämpas på $\frac{R(x)}{Q(x)}$.

4.8 Invers substitution

I detta avsnitt kommer vi att se exempel på en variant av substitution, som underlättar vissa typer av integraler. Det handlar om **invers substitution**. För att beräkna $\int f(x)\,dx$ inför vi en ny variabel v genom det implicita sambandet $x = g(v)$, där alltså g är en funktion av v och inte tvärtom som vi tidigare gjort.

Exempel 4.8.1

För att beräkna $\int_{-1}^{2} \sqrt{9 - x^2}\,dx$, kan vi först tänka geometriskt för att få en idé till en lämplig substitution.



Integralen är alltså lika med den skuggade arean innanför cirkeln. Vi kommer att se att integralen blir enklare om vi byter variabel till vinkeln v. Eftersom cirkelns radie är 3, och vinkeln mäts mot y-axen, gäller sambandet $x = 3\sin v$. Vi gör därför detta variabelbyte. (Detta är ekvivalent med $v = \arcsin\frac{x}{3}$, eftersom $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$, men vi fortsätter att skriva det som $x = 3\sin v$.) Vi får

$$\int_{-1}^{2} \sqrt{9 - x^2}\, dx = \boxed{\begin{array}{l} x = 3\sin v \\ \dfrac{dx}{dv} = 3\cos v \\ dx = 3\cos v\ dv \end{array}} = \int_{x=-1}^{x=2} \sqrt{9 - (3\sin v)^2}\, 3\cos v\ dv.$$

Enligt den trigonometriska ettan är

$$\sqrt{9 - (3\sin v)^2} = \sqrt{9(1 - \sin^2 v)} = \sqrt{9\cos^2 v} = 3|\cos v| = 3\cos v,$$

där den sista likheten gäller eftersom $\cos v > 0$ på det aktuella intervallet, där $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$. Integranden är alltså lika med

$$3\cos v \cdot 3\cos v = 9\cos^2 v = \tfrac{9}{2}(1 + \cos 2v),$$

där den sista likheten följer från formeln för dubbla vinkeln. Integralen är därmed lika med

$$\frac{9}{2}\int_{x=-1}^{x=2} 1 + \cos 2v\ dv = \frac{9}{2}\left(v + \frac{1}{2}\sin 2v\right)\Bigg|_{x=-1}^{x=2}.$$

För att slutligen få ut värdet på integralen måste vi använda $v = arcsin\frac{x}{3}$ när vi sätter in $x = -1$ och $x = 2$. Vi lämnar detta åt läsaren.

Även om beräkningen blev lång i exemplet ovan, blev själva integrationen enkel. Vi noterar några viktiga poänger.

- En fördel med den inversa substitutionen, dvs det omvända variabelbytet, där ursprungsvariabeln x är en funktion $g(v)$ av en ny variabel v, är att $dx = g'(v)\ dv$. Vi behöver därmed inte någon inre derivata framför dx, som var fallet i tidigare substitution. Nackdelen är att det nya uttrycket blir mer invecklat, men i några situationer blir det enklare till slut genom olika förenklingar. I exemplet ovan skedde det tack vare diverse trigonometriska samband.
- För att kunna genomföra en invers substitution $x = g(v)$ måste funk-

tionen g vara injektiv, så att v i princip går att lösa ut från x. I exemplet ovan noterade vi man kan lösa ut $v = \arcsin \frac{x}{3}$, så länge $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$. Om funktionen inte är injektiv förloras en del av integralen. Det mest extrema fallet vore att göra substitutionen $x = 0 \cdot v$, som gör att allt blir 0. Detta innebär att man ibland måste begränsa definitionsmängden, som t ex $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$ ovan.

Den andra poängen kan tolkas som att invers substitution inte innebär någon ny matematik jämfört med vanlig substitution: istället för $x = g(v)$ hade vi kunnat sätta $v = g^{-1}(x)$, eftersom g är injektiv. Detta hade krävt vissa manipulationer för att hitta den inre derivatan till $g^{-1}(x)$ framför dx. Anledningen till att invers substitution är användbar är alltså att *beräkningarna* blir enklare. Detta gäller särskilt för tre typer av integraler:

- Om integranden innehåller $\sqrt{a^2 - x^2}$, kan bytet $x = a \sin v$ användas.
- Om integranden innehåller $\sqrt{a^2 + x^2}$, kan bytet $x = a \tan v$ användas.
- Om integranden innehåller $\sqrt{x + a}$, kan bytet $x = v^2 - a$ användas.

Vi nöjer oss så långt med att ha gått igenom idén med invers substitution och några av dess användningar.

4.9 Generaliserade integraler

Hittills har vi integrerat kontinuerliga funktioner på slutna, begränsade intervall. I detta avsnitt ska vi utvidga detta till att hantera situationer där oändligheten är inblandad. Vi motiverar med ett exempel från elektricitetslära.

Exempel 4.9.1

När ström går genom en elektrisk ledare alstras ett magnetiskt fält runt ledaren. Från elektromagnetismens lagar kan man härleda att det magnetiska fältet i en punkt på avstånd r från ledaren är lika med

$$B = K \int_a^b \frac{r}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx,$$

där K är en fysikalisk konstant. Här tänker vi alltså oss ledaren som en kabel utsträckt längs x-axeln mellan $x = a$ och $x = b$, medan punkten befinner sig på avstånd r rakt ut från ledaren i nivå med origo. I typiska tillämpningar är r mycket litet i förhållande till längden av intervallet $[a, b]$ (T ex kan r vara några centimeter och $b - a$ flera kilometer.) Då kan man approximera ledaren med en oändligt lång kabel, vilket faktiskt förenklar beräkningarna. Man använder alltså approximationen

$$B \approx K \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx.$$

Därför behöver vi definiera vad en sådan integral betyder och lära oss beräkna den.

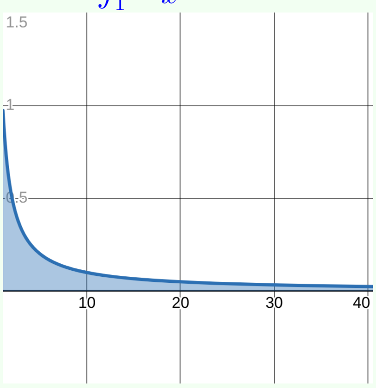
En "integral" där oändligheten är inblandad kallas för en **generaliserad integral**. Att vi sätter citationstecken beror på att vi bara definierat integraler i fall där en kontinuerlig funktion f integreras över ett slutet, begränsat intervall. Generaliserade integraler kan bryta mot detta på två sätt, vilket ger två typer av generaliserade integraler.

- Typ I. Intervallet är obegränsat (dvs oändligt långt).
- Typ II. Funktionen är obegränsad (dvs går mot ∞ eller $-\infty$).

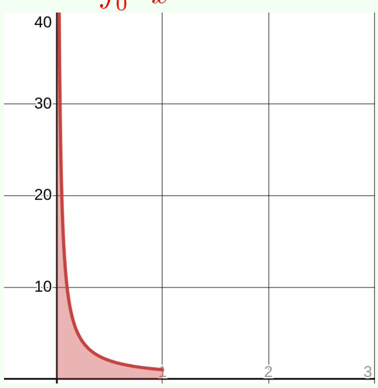
Vissa generaliserade integraler är en kombination av dessa två typer, men genom att förstå dem kan vi hantera alla generaliserade integraler.

Exempel 4.9.2

Den generaliserade integralen $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$ av typ I.



Den generaliserade integralen $\int_0^{1} \frac{1}{x}\, dx$ av typ II.

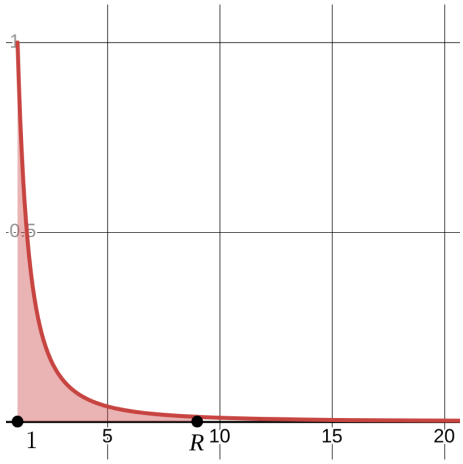


Vi ska nu gå igenom hur generaliserade integraler av dessa två typer definieras och beräknas.

Typ I: obegränsade intervall.

Antag först att du vill beräkna $\displaystyle\int_1^R \frac{1}{x^2}\,dx$, där $R > 1$ är stort positivt (ändligt) tal. Med analysens fundamentalsats kan vi beräkna

$$\int_1^R \frac{1}{x^2}\,dx = \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^R = \left(-\frac{1}{R}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1 - \frac{1}{R}.$$



Ju större R är, desto längre högerut sträcker sig området under grafen. Det är rimligt att *definiera* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ som gränsvärdet av $\displaystyle\int_1^R \frac{1}{x^2}\,dx$ då $R \to \infty$. Detta motiverar följande definition.

Definition 4.12

- Om funktionen f är kontinuerlig på intervallet $[a, \infty)$ definieras den generaliserade integralen $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ som $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx$.
- Om funktionen f är kontinuerlig på intervallet $(-\infty, b]$ definieras den generaliserade integralen $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ som

$$\lim_{R\to-\infty}\int_R^b f(x)\,dx.$$

I båda fallen säger vi att den generaliserade integralen är **konvergent** om gränsvärdet existerar, och **divergent** annars.

Om vi går tillbaka till exemplet ovan fick vi att $\int_1^R \frac{1}{x^2}\,dx = 1-\frac{1}{R}$. Därmed är

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} 1-\frac{1}{R} = 1.$$

Den generaliserade integralen är alltså konvergent och **konvergerar mot** värdet 1.

Exempel 4.9.3

Avgör om de generaliserade integralerna

a) $\int_2^\infty \frac{1}{x}\,dx$, och b) $\int_{-\infty}^0 \cos x\,dx$

är konvergenta, och beräkna dem i så fall (dvs avgör vad de konvergerar mot).

Lösning. a) Vi har

$$\int_2^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_2^R \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left(\ln x\Big|_2^R\right) = \lim_{R\to\infty}(\ln R-\ln 2) = \infty,$$

eftersom $\ln R\to\infty$ då $R\to\infty$. Den generaliserade integralen är därför divergent (den divergerar mot ∞).

b) Här har vi

$$\int_{-\infty}^0 \cos x\,dx = \lim_{R\to-\infty}\int_R^0 \cos x\,dx = \lim_{R\to\infty}\left(\sin x\Big|_R^0\right) = \lim_{R\to-\infty}(0-\sin R).$$

Detta gränsvärde existerar inte, då $\sin R$ oscillerar mellan -1 och 1 då $R\to\infty$. Den generaliserade integralen är därmed divergent.

Anmärkning 4.9.4

Som vi sett i våra exempel kan alltså en generaliserad integral

- konvergera (mot ett reellt tal),
- divergera mot ∞ eller $-\infty$, eller
- divergera på något annat sätt (som i $\cos x$-exemplet ovan).

Om intervallet är obegränsat både åt höger och åt vänster, delar vi upp intervallet enligt följande definition.

Definition 4.13

Om funktionen f är kontinuerlig på $\mathbb{R}$, definieras den generaliserade integralen $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ enligt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx,$$

där a är något reellt tal.

Detta reducerar alltså problemet till två generaliserade integraler där intervallet bara är obegränsat åt ena hållet. Varje sådan integral kan vi sedan beräkna separat med ett gränsvärde. Man kan visa (fundera gärna på hur) att valet av a inte spelar någon roll. Oftast väljer man därför något a som underlättar beräkningarna.

Exempel 4.9.5

Beräkna $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$.

Lösning. Vi delar upp integralen vid $x = 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx,$$

och börjar med den högra integralen. Vi har

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{R\to\infty}(\arctan R - \arctan 0) = \frac{\pi}{2},$$

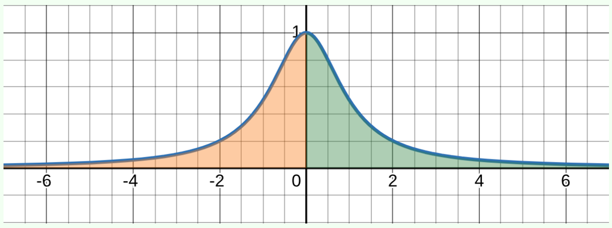
där vi använt att $\arctan 0 = 0$ och $\arctan R \to \frac{\pi}{2}$ då $R \to \infty$ (se anmärkning 2.8.6).

Genom en liknande beräkning — eller ett symmetriargument — får vi

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

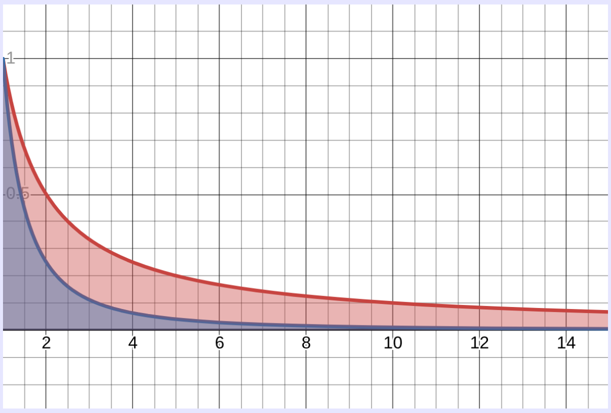
så sammanlagt är

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$



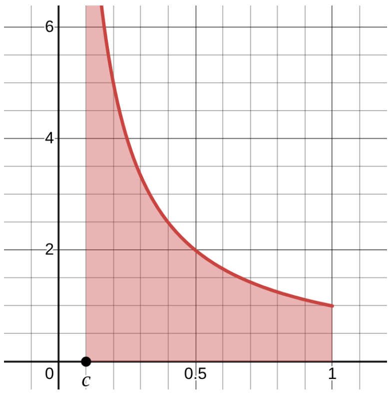
Anmärkning 4.9.6

Att den generaliserade integralen ovan konvergerar innebär att området under grafen har en ändlig area, trots att det är oändligt långt. Detta beror grovt sagt på att området blir *tillräckligt tunt tillräckligt snabbt*. I tidigare exempel såg vi att $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ är konvergent, medan $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ är divergent. Detta beror på att $\frac{1}{x^2}$ går mot noll "tillräckligt snabbt", medan $\frac{1}{x}$ inte gör det, vilket man kan ana i figuren nedan. Därför blir arean ändlig i det första fallet, men inte i det andra.



Om detta påminner dig om beteendet hos serier och särskilt skillnaden mellan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ och $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, så är det ingen slump. Vi återkommer strax till kopplingen mellan generaliserade integraler och serier.

Typ II: obegränsade funktioner.



För att beräkna arean under $y = \dfrac{1}{x}$ mellan $x = 0$ och $x = 1$, behöver vi definiera

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx.$$

Denna gång är intervallet $[0, 1]$, som är slutet och begränsat, men integranden är obegränsad då x går mot intervallets ena ändpunkt: $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty$. Därför kan vi inte använda den vanliga integraldefinitionen, utan detta är också en generaliserad integral. Även här använder vi gränsvärden: vi integrerar på intervallet $[c, 1]$, där $c > 0$, så att funktionen är begränsad där. Sedan låter vi $c \to 0^+$. Detta motiverar följande definition.

Definition 4.14

- Om funktionen f är kontinuerlig på intervallet $(a, b]$ och möjligen obegränsad vid a, definieras den generaliserade integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ som

$$\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx.$$

- Om funktionen f är kontinuerlig på intervallet $[a,b)$ och möjligen obegränsad vid b, definieras den generaliserade integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ som

$$\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx.$$

I båda fallen säger vi att den generaliserade integralen är **konvergent** om gränsvärdet existerar, och **divergent** annars.

Enligt definitionen får vi alltså

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to 0^+}\int_c^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to 0^+}\left(\ln x\big|_c^1\right) = \lim_{c\to 0^+}(0-\ln c) = \infty,$$

eftersom $\ln c \to -\infty$ då $c \to 0^+$. Integralen är alltså divergent; den divergerar mot ∞.

Exempel 4.9.7

Beräkna

a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx,$ b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(t-2)^2}\,dt.$

Lösning. a) Integranden är obegränsad vid 0, så vi har

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c\to 0^+}\int_c^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c\to 0^+}\left(2\sqrt{x}\big|_c^2\right) = \lim_{c\to 0^+}(2\sqrt{2}-\cancelto{0}{2\sqrt{c}}) = 2\sqrt{2}.$$

Integralen konvergerar alltså mot $2\sqrt{2}$.

b) Här är integranden obegränsad vid 2, och vi har

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{(t-2)^2}\,dt &= \lim_{c\to 2^-}\int_c^1 \frac{1}{(t-2)^2}\,dt\\ &= \lim_{c\to 0^+}\left(-\frac{1}{t-2}\bigg|_1^c\right)\\ &= \lim_{c\to 0^+}\left(-\frac{1}{c-2}-1\right) = -\infty.\end{aligned}$$

Integralen är alltså divergent.

Anmärkning 4.9.8

Om integranden är obegränsad vid någon punkt i intervallets inre, dvs inte en ändpunkt, definierar man den generaliserade integralen genom att dela upp intervallet i denna punkt.

Vi lämnar det som övning att formulera anmärkningen ovan som en regelrätt definition, och illustrerar den med ett exempel.

Exempel 4.9.9

Integralen $\int_{-1}^{8} \frac{1}{x^{2/3}}\,dx$ är generaliserad då integranden är obegränsad vid 0. Enligt anmärkningen ovan har vi

$$\int_{-1}^{8} \frac{1}{x^{2/3}}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^{2/3}}\,dx + \int_{0}^{8} \frac{1}{x^{2/3}}\,dx.$$

Nu har vi två integraler där integranden är obegränsad vid ena ändpunkten, och dessa kan vi hantera som förut. En primitiv funktion är $3x^{1/3}$, så vi har

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^{2/3}}\,dx = \lim_{c\to 0^-}\int_{-1}^{c} \frac{1}{x^{2/3}}\,dx = \lim_{c\to 0^-}\left(3c^{1/3} - 3(-1)^{1/3}\right) = 3,$$

och

$$\int_{0}^{8} \frac{1}{x^{2/3}}\,dx = \lim_{c\to 0^-}\int_{c}^{8} \frac{1}{x^{2/3}}\,dx = \lim_{c\to 0^-}\left(3\cdot 8^{1/3} - 3c^{1/3}\right) = 6,$$

och sammantaget är

$$\int_{-1}^{8} \frac{1}{x^{2/3}}\, dx = 3 + 6 = 9.$$

På liknande sätt definieras generaliserade integraler som har flera obegränsningar: intervallet delas upp så att man får integraler som innehåller en obegränsning var. Man kan visa att det inte spelar någon roll var man delar upp integralerna. Vi låter följande exempel illustrera principen.

Exempel 4.9.10

Beräkna

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\, dx.$ b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^2 - x}\, dx,$

Lösning. a) Den här integralen är generaliserad på två sätt: dels är intervallet obegränsat, och dels är integranden obegränsad vid 0. Vi delar upp integralen enligt

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx.$$

Enligt satsen nedan är den första integralen i summan divergent, och den andra konvergent. Därmed existerar inte gränsvärdet och hela hela integralen är divergent.

b) Här är integranden obegränsad vid 0 och 1. Vi delar därför upp integralen dels i 1, så att den punkten blir en ändpunkt, och dels i (säg) $\frac{1}{2}$, så att inte fler obegränsningar förekommer i samma integral. Vi får alltså

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2 - x}\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2 - x}\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^2 - x}\, dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2 - x}\, dx.$$

Vi lämnar beräkningen som övning; kom ihåg att hela integralen är divergent om inte varje integral i summan konvergerar.

Anmärkning 4.9.11

Vi kan nu gå tillbaka till Exempel 4.4.14 och konstatera att den integralen divergerar mot ∞.

Vi har sett att integraler av $\dfrac{1}{x^p}$, där p är en konstant, beter sig på olika sätt beroende på vad p är och ifall man integrerar på intervallet $[0, a]$ eller $[a, \infty)$, där a är ett reellt tal. Följande sats sammanfattar detta.

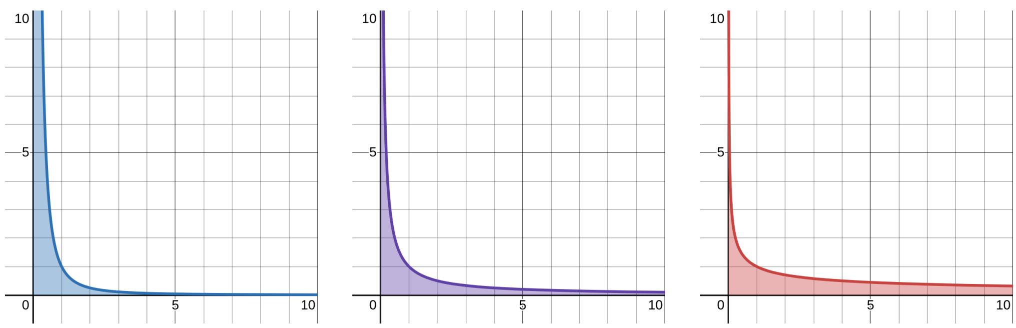
Sats 4.15

Låt a vara ett positivt reellt tal och p en reell konstant.

a) Integralen $$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx \begin{cases} \text{konvergerar} & \text{om } p > 1 \\ \text{divergerar mot } \infty & \text{om } p \leq 1 \end{cases}$$

b) Integralen $$\int_0^a \frac{1}{x^p}\,dx \begin{cases} \text{konvergerar} & \text{om } p < 1 \\ \text{divergerar mot } \infty & \text{om } p \geq 1 \end{cases}$$

Vi illustrerar satsen med följande figurer. I den vänstra figuren är $p = 2$, vilket leder till att området smalnar av snabbt då $x \to \infty$, men långsamt då $x \to 0$, vilket leder till konvergens i det första fallet och divergens i det andra. I den högra figuren är $p = \frac{1}{2}$, och beteendet är omvänt, eftersom funktionen är invers till funktionen i den vänstra figuren. Den mellersta figuren illustrerar gränsfallet $p = 1$, där vi har divergens i båda fallen.



Bevis: Vi antar först att $p \neq 1$. Då är $\dfrac{x^{1-p}}{1-p}$ en primitiv funktion till $\dfrac{1}{x^p} = x^{-p}$.

Integralen i a) är då

$$\lim_{R\to\infty} \int_a^R \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{R\to\infty} \left(\frac{R^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p} \right).$$

Om $p > 1$ är $1 - p < 0$, så $R^{1-p} \to 0$ då $R \to \infty$, och integralen konvergerar mot $-\dfrac{a^{1-p}}{1-p}$ (som är positivt eftersom nämnaren är negativ). Om $p < 1$ är $1 - p > 0$, så $R^{1-p} \to \infty$ då $R \to \infty$, och integralen divergerar mot ∞.

Integralen i b) är istället

$$\lim_{c\to 0^+} \int_c^a \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{c\to 0^+} \left(\frac{a^{1-p}}{1-p} - \frac{c^{1-p}}{1-p} \right).$$

Om $p < 1$ är $1 - p > 0$, så $c^{1-p} \to 0$ då $c \to 0^+$, och integralen konvergerar mot $\dfrac{a^{1-p}}{1-p}$. Om $p > 1$ är $1 - p < 0$, så $c^{1-p} \to \infty$ då $c \to 0^+$, och integralen divergerar mot ∞.

Fallet $p = 1$ har vi delvis mött tidigare; här är $\ln x$ en primitiv funktion. Integralen i a) är

$$\lim_{R\to\infty} \int_a^R \frac{1}{x}\, dx = \lim_{R\to\infty} (\ln R - \ln a) = \infty,$$

eftersom $\ln R \to \infty$, och integralen i b) är

$$\lim_{c\to 0^+} \int_c^a \frac{1}{x}\, dx = \lim_{c\to 0^+} (\ln a - \ln c) = \infty,$$

eftersom $\ln c \to -\infty$, så båda divergerar mot ∞.

Satsen kan användas i jämförelsetest, för att avgöra om mer komplicerade generaliserade integraler divergerar eller konvergerar. Detta bygger på följande jämförelsekriterium.

Sats 4.16: Jämförelsetest för integraler

Antag att funktionerna f och g är kontinuerliga och uppfyller $0 \leq f(x) \leq g(x)$ på intervallet (a, b), där $a \in \mathbb{R}$ eller $a = -\infty$, och $b \in \mathbb{R}$ eller $b = \infty$.

Om $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ är konvergent, så är även $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ konvergent, och

$$0 \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Jämför denna sats med Jämförelsetest I för serier (Sats 3.14); båda bygger på samma idé. Vi illustrerar satsen med ett exempel.

Exempel 4.9.12

Avgör om $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$ är konvergent eller divergent. Om den är konvergent, ange en nedre och en övre uppskattning för dess värde.

Lösning. Integralen är generaliserad på två sätt, då intervallet är obegränsat och funktionen är obegränsad vid 0. Vi delar upp i 1:

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx.$$

Det är inte enkelt att bestämma primitiv funktion till integranden. Eftersom vi inte söker något exakt resultat, använder vi satsen ovan. Vi noterar att både

$$0 \leq \frac{1}{x^2+\sqrt{x}} \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{och} \quad 0 \leq \frac{1}{x^2+\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

gäller på $(0, \infty)$. Den första jämförelsen är mer användbar på intervallet $[1, \infty)$, där integralen av $\dfrac{1}{x^2}$ är konvergent, och den andra är mer på intervallet $[0, 1]$, där istället integralen av $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ är konvergent. Vi har

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \cdots = 2\ dx$$

där den sista likheten bygger på beräkningen i beviset till Sats 4.15, och på samma sätt

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \cdots = 1\,dx.$$

Därmed är integralen i fråga konvergent, och

$$0 \leq \int_0^\infty \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx \leq 2 + 1 = 3.$$

Kopplingen till serier

Jämför integralen $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ med serien $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$. Båda konvergerar då $p > 1$ och divergerar då $p \leq 1$. Faktum är att detta samband gäller mer allmänt mellan integralen av $f(x)$ och summan av $f(n)$, enligt följande sats.

Sats 4.17: Integraltest för serier

Antag att funktionen f är positiv, kontinuerlig och avtagande på intervallet $[N, \infty)$ för något $N > 0$. Då är integralen $\displaystyle\int_N^\infty f(x)\,dx$ och serien $\sum_{n=N}^\infty f(n)$ antingen båda konvergenta, eller båda divergenta mot ∞.

Eftersom vi har bättre metoder för att beräkna integraler än vad vi har för serier, kan man betrakta satsen som ett konvergenstest för serier, nämligen som följer.

För att avgöra om serien $\sum_{n=N}^\infty f(n)$ är konvergent, undersöker vi konvergensen hos den generaliserade integralen $\displaystyle\int_N^\infty f(x)\,dx$.

Bevisidé: Vi ger en geometrisk idé till beviset i grova drag (se figuren nedan). Integralen $\displaystyle\int_N^\infty f(x)\,dx$ ger arean under grafen $y =$

$f(x)$. Arean under den blå "trappstegsfunktionen" är

$$f(N) + f(N+1) + f(N+2) + \cdots = \sum_{n=N}^{\infty} f(n),$$

eftersom varje trappsteg har bredd 1 och höjd lika med funktionsvärdet i trappstegets vänstra ändpunkt. Eftersom f är positiv och avtagande gäller

$$0 \leq \int_N^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=N}^{\infty} f(n).$$

Om serien är konvergent, så är därför integralen konvergent: detta kan man visa med hjälp en förfinad variant av Sats 4.16; intuitionen är att om den större arean är ändlig, så är den mindre arean det.

Arean under den lila "trappstegsfunktionen" är

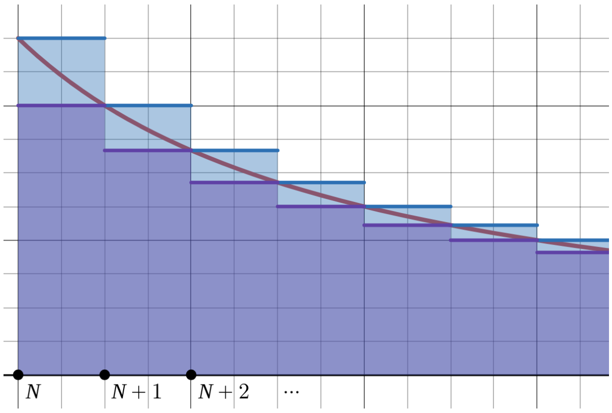
$$f(N+1) + f(N+2) + f(N+3) + \cdots = \sum_{n=N+1}^{\infty} f(n),$$

eftersom varje trappsteg har bredd 1 och höjd lika med funktionsvärdet i trappstegets högra ändpunkt. Eftersom f är positiv och avtagande gäller

$$0 \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) \leq \int_N^{\infty} f(x)\,dx.$$

Med ett liknande resonemang följer det att om integralen konvergerar, så måste serien konvergera. (Att serien börjar i $n = N+1$ istället för $n = N$ påverkar inte konvergensen, eftersom skillnaden är det ändliga talet $f(N)$.)

Därmed är integralen konvergent om och endast om serien är konvergent, vilket skulle visas.



Vi kan nu äntligen visa Sats 3.9: den så kallade p-serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergerar om och endast om $p > 1$. Detta följer från Sats 4.15 genom Sats 4.17.

Exempel 4.9.13

Avgör om serien

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

är konvergent eller divergent.

Lösning. Vi har tidigare sett att denna serie är svår att hantera med våra tidigare konvergenstester. Vi provar därför integraltestet från Sats 4.17, vilket innebär att vi undersöker konvergensen hos den generaliserade integralen

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\, dx.$$

Vi tar fram en primitiv funktion genom substitution

$$\int \frac{1}{x \ln x}\, dx = \boxed{\begin{array}{l} t = \ln x \\ \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x} \\ dt = \dfrac{1}{x}\, dx \end{array}} = \int \frac{1}{t}\, dt,$$

så en primitiv funktion är $\ln|t| = \ln|\ln x|$. När vi sätter in den gränserna 3 och R, får vi därför

$$\int_3^R \frac{1}{x \ln x}\, dx = \ln|\ln R| - \ln|\ln 3|.$$

När $R \to \infty$ går $\ln R \to \infty$, och därför även $\ln|\ln R| \to \infty$. Integralen är därför divergent.

4.10 Tillämpning: areor, volymer och båglängder

Låt oss gå tillbaka till grunderna för integraler: om f är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$, så såg vi i Sats 4.4 att

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \text{alla}\Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Om $f(x) \geq 0$ på intervallet $[a, b]$ så är detta lika med arean av området som befinner sig under grafen $y = f(x)$, över x-axeln, till höger om $x = a$ och till vänster om $x = b$. I riemannsumman

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i,$$

har vi delat in intervallet $[a, b]$ i delintervall: för varje i har det $i$te intervallet bredden Δx_i och c_i är en punkt på det intervallet. Därför är varje term $f(c_i)\Delta x_i$ arean av en rektangel med höjd $f(c_i)$ och bredd Δx_i. I gränsvärdet tar vi allt fler och allt tunnare rektanglar.

I detta avsnitt ska vi använda integraler för att beräkna (mer allmänna) areor, volymer och båglängder. Även om vi inte kommer att göra formella härledningar, kommer idén med Riemannsummor att vara vägledande.

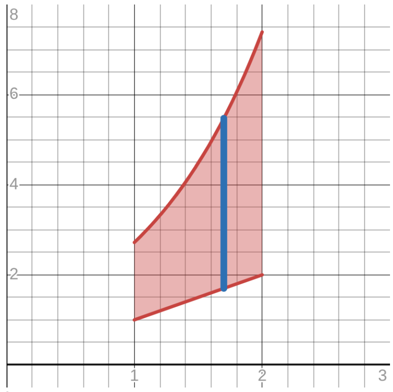
Areor mellan grafer

Vi börjar med en liten utvidgning av ovanstående: om funktionerna f och g är kontinuerliga och uppfyller $g(x) \leq f(x)$ på intervallet $[a, b]$, så ges arean av området som befinner sig under $y = g(x)$, över $y = f(x)$, till höger om $x = a$ och till vänster om $x = b$ av

$$\int_a^b f(x) - g(x)\; dx.$$

Enligt Sats 4.4 är detta nämligen

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \text{alla}\Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} (f(c_i) - g(c_i))\Delta x_i.$$



I figuren till höger är grafen till $g(x) = x$ nederst och grafen till $f(x) = e^x$ överst. Den blå stapeln illustrerar en rektangel med höjd $f(c_i) - g(c_i)$ och bredd Δx_i. Arean är

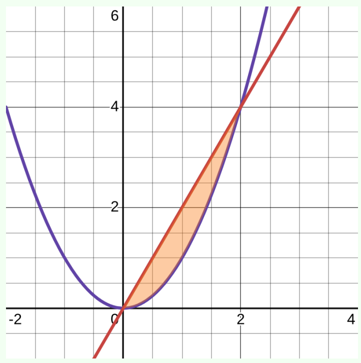
$$\int_1^2 e^x - x\; dx = \left(e^x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 = e^2 - e - \frac{3}{2}$$

areaenheter.

Exempel 4.10.1

Beräkna arean av det begränsade område som begränsas av kurvorna $y = x^2$ och $y = 2x$.

Lösning. Vi noterar att kurvorna skär varandra då $x^2 = 2x$, som har lösningarna $x = 0$ och $x = 2$. Till höger om $x = 2$ och till vänster om $x = 0$ är områdena över och under kurvorna obegränsade, så det enda begränsade område är det som är mellan kurvorna på intervallet $[0, 2]$. På detta intervall är $y = x^2$ nederst och $2x$ överst, så arean är



$$\int_0^2 2x - x^2 dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{4}{3}\text{ ae.}$$

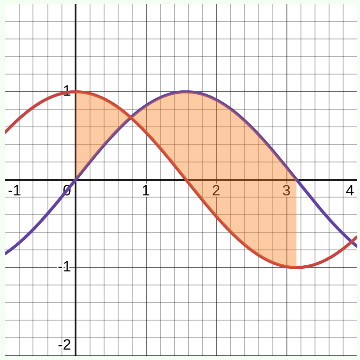
(där **ae** står för **areaenheter**).

Anmärkning 4.10.2

Det är viktigt att hålla reda på vilken funktion som är överst och vilken som är nederst. Integralen kan ju vara negativ, medan en area alltid är positiv. Detta är särskilt viktigt då funktionsgraferna korsar varandra, som nästa exempel visar.

Exempel 4.10.3

Beräkna arean av det begränsade område som begränsas av kurvorna $y = \sin x$ och $y = \cos x$ på intervallet $[0, \pi]$.



Lösning. Vi undersöker först var kurvorna skär varandra. Ekvationen

$$\sin x = \cos x$$

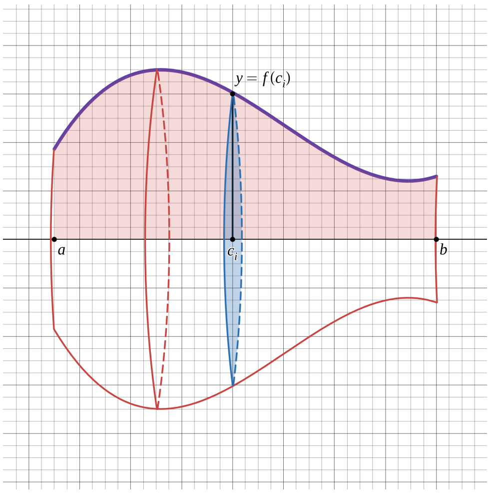
har precis en lösning $x = \frac{\pi}{4}$ på intervallet $[0, \pi]$. för att avgöra vilken som är överst till vänster och till höger om $x = \frac{\pi}{4}$, räcker det att pröva en punkt på vardera sida (eftersom vi vet att funktionerna är kontinuerliga och inte har några andra skärningspunkter på intervallet). Vi har exempelvis $\sin 0 = 0$ och $\cos 0 = 1$, så $\sin x \leq \cos x$ på intervallet $[0, \frac{\pi}{4}]$, medan $\sin \pi = 0$ och $\cos \pi = -1$, så $\sin x \geq \cos x$ på intervallet $[\frac{\pi}{4}, \pi]$. För att beräkna arean delar vi upp intervallet i $x = \frac{\pi}{4}$ och integrerar den övre minus den nedre funktionen på varje del, dvs arean är

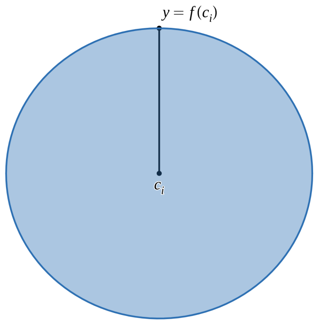
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x - \sin x \; dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin x - \cos x \; dx$$

areaenheter. Vi lämnar beräkningen som övning.

Rotationskroppar: rotation runt x-axeln och skivmetoden

Antag att funktionen f är en positiv och kontinuerlig på intervallet $[a, b]$. När området mellan $y = f(x)$ och x-axeln roteras runt x-axeln, uppstår en så kallad **rotationskropp**, som figuren till vänster visar. Vårt mål är att beräkna dess volym, och vi använder idén om riemannsummor.





På samma sätt som arean under grafen kunde approximeras som en summa av rektangelareor, kan volymen hos rotationskroppen approximeras som summan av volymer hos tunna skivor

$$\sum_{i=1}^{n} A(c_i)\Delta x_i,$$

där varje skiva har arean $A(c_i)$ och tjockleken Δx_i. Eftersom kroppen uppstått genom rotation av kurvan $y = f(x)$ är varje skiva en cirkel, som i figuren till höger, med radie $f(c_i)$, så

$$A(c_i) = \pi f(c_i)^2.$$

Vi definierar därför **rotationsvolymen** som

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \text{alla}\Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} A(c_i)\Delta x_i = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \text{alla}\Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \pi f(c_i)^2 \Delta x_i.$$

Eftersom $A(x) = \pi f(x)^2$ är kontinuerlig följer det från Sats 4.4 att detta är lika med

$$V = \int_a^b A(x)\ dx = \int_a^b \pi f(x)^2\ dx = \pi \int_a^b f(x)^2\ dx$$

volymenheter.

Exempel 4.10.4

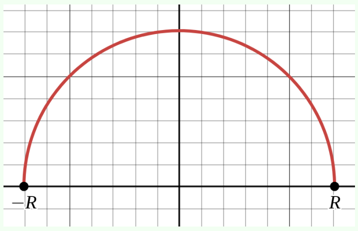
Området som begränsas av $y = x^3$, x-axeln, $x = 1$ och $x = 2$ roteras runt x-axeln. Rotationskroppen har volymen

$$V = \pi \int_1^2 (x^3)^2\, dx = \pi \int_1^2 x^6\, dx = \pi \left(\frac{2^7}{7} - \frac{1^7}{7} \right) = \frac{127}{7}\pi$$

volymenheter.

Exempel 4.10.5

Låt R vara ett positivt reellt tal. Kurvan $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ är en halvcirkel med radie R. Den rotationsvolym som fås när den roteras runt x-axeln är därför ett klot med radie R. Vi kan därför beräkna klotets volym V som rotationsvolym enligt



$$V = \pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}^2\, dx = 2\pi \int_0^R R^2 - x^2\, dx = 2\pi \left(R^2 x - \frac{R^3}{3} \right) \Bigg|_0^R,$$

vilket är lika med $\frac{4\pi R^3}{3}$ volymenheter, som bekant. (Notera att vi förenklade integralen genom att använda den jämna symmetrin.)

Exempel 4.10.6

Området från Exempel 4.10.1, som begränsas av $y = x^2$ och $y = 2x$, roteras runt x-axeln. (Kom ihåg att integrationsgränserna är $x = 0$ och $x = 2$.) Beräkna rotationsvolymen.

Lösning. Rotationskroppen får vi genom att rotera $y = 2x$ (den övre kurvan) runt x-axeln, och från den rotationskroppen subtrahera den rotationskropp som området under $y = x^2$ (den nedre kurvan) skapar. Med andra ord har vi

$$V = \pi \int_0^2 (2x)^2\, dx - \pi \int_0^2 (x^2)^2\, dx = \pi \int_0^2 4x^2 - x^4\, dx = \frac{64}{15}\pi \text{ ve}$$

(där **ve** står för **volymenheter**). Vi har hoppat över detaljerna i integralberäkningen.

Subtraktionen i exemplet ovan fungerar i allmänhet: om $0 \leq g(x) \leq f(x)$ gäller på intervallet $[a, b]$, och området mellan $y = f(x)$ och $y = g(x)$ roteras runt x-axeln, fås rotationsvolymen

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 - g(x)^2 \, dx.$$

Anmärkning 4.10.7: Varning!

Var noga med att skilja på $\int_a^b f(x)\, dx$ och $\pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$. Båda är integraler, men har olika tolkningar. Den första ger arean av området under grafen, och den andra ger rotationsvolymen då det området roteras runt x-axeln.

Vi kan kombinera detta med generaliserade integraler för att beräkna volymer av obegränsade områden.

Exempel 4.10.8

Området under kurvan $y = \dfrac{1}{x}$, ovanför x-axeln och till höger om $x = 1$ roteras runt x-axeln. Rotationsvolymen ges av

$$\pi \int_1^\infty \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx.$$

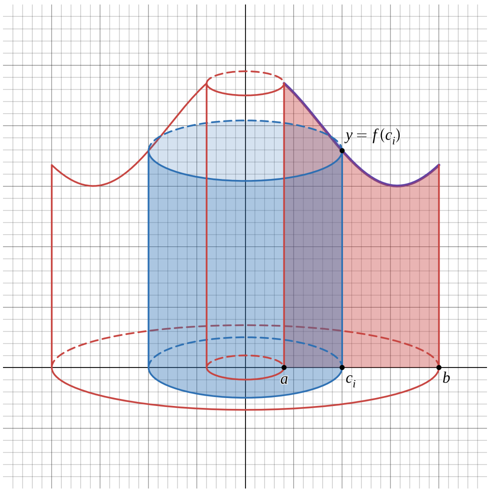
Sedan tidigare vet vi att $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx$ konvergerar till 1, så volymen är π volymenheter.

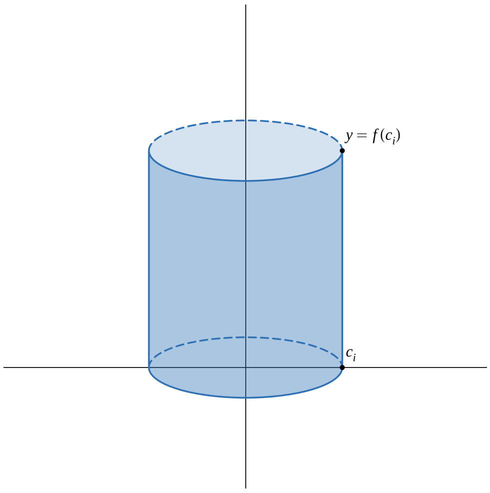
Anmärkning 4.10.9

Notera att området under kurvan $y = \dfrac{1}{x}$, ovanför x-axeln och till höger om $x = 1$ har *oändlig area*, eftersom integralen $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx$ divergerar mot ∞, men när denna oändliga area roteras runt x-axeln har rotationskroppen *ändlig volym*. Fundera gärna på hur det kan komma sig!

Rotationskroppar: rotation runt y-axeln och skalmetoden

Vi fortsätter att betrakta en funktion f som är en positiv och kontinuerlig på intervallet $[a, b]$. Nu vill vi beräkna volymen av rotationskroppen som fås när området mellan $y = f(x)$ och x-axeln roteras runt y-axeln, som figuren nedan till vänster visar.





Denna gång approximerar vi volymen hos rotationskroppen som summan av volymer hos cylindriska skal. Varje cylindriskt skal har tjockleken Δx_i. Volymen hos ett cylindriskt skal är något svår att beräkna: skalets utsida och insida är cirkulära cylindrar men med olika radier (skillnaden är just Δx_i). Därför approximerar vi volymen med arean hos en cylinder, multiplicerad med tjockleken. En cirkulär cylinder med radie c_i och höjd $f(c_i)$ har area $A(c_i) = 2\pi c_i f(c_i)$. Volymen hos ett cylindriskt skal är därför ungefär lika med $A(c_i)\Delta x_i$. (Man kan göra beräkningen exakt, och man kan också visa att skillnaden mellan det exakta resultatet och vårt ungefärliga resultat går mot 0 när vi tar gränsvärdet i det som följer. Det innebär att vi kan använda vårt ungefärliga resultat utan fara.)

Vi kan därför definiera rotationsvolymen som

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \text{alla}\Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} A(c_i)\Delta x_i = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \text{alla}\Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} 2\pi c_i f(c_i).$$

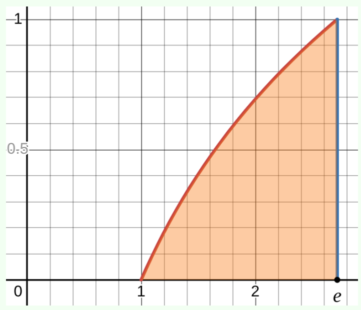
Eftersom $2\pi x f(x)$ är kontinuerlig följer det från Sats 4.4 att detta är lika med

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\ dx = 2\pi \int_a^b x f(x)\ dx$$

volymenheter.

Exempel 4.10.10

Området som begränsas av $y = \ln x$, x-axeln, $x = 1$ och $x = e$ roteras runt y-axeln. Rotationskroppen har volymen $V = 2\pi \int_1^e x \ln x\ dx$. En primitiv funktion till $x \ln x$ bestämde vi faktiskt i Exempel 4.6.5 med hjälp av partiell integration. Detta ger



$$2\pi \int_1^e x \ln x\ dx = 2\pi \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right) \Bigg|_1^e = \frac{e^2+1}{2}\pi,$$

och volymen är därmed $\frac{e^2+1}{2}\pi$ volymenheter.

Exempel 4.10.11

Området från Exempel 4.10.1, som begränsas av $y = x^2$ och $y = 2x$, roteras nu runt y-axeln. (Kom ihåg att integrationsgränserna är $x = 0$ och $x = 2$.) Beräkna rotationsvolymen.

Lösning. Rotationskroppen får vi genom att rotera $y = 2x$ (den övre kurvan) runt y-axeln, och från den rotationskroppen subtrahera den rotationskropp som området under $y = x^2$ (den nedre kurvan) skapar. Med andra ord har vi

$$V = 2\pi \int_0^2 x \cdot 2x\ dx - 2\pi \int_0^2 x \cdot x^2\ dx = 2\pi \int_0^2 2x^2 - x^3\ dx = \frac{8}{3}\pi \text{ ve.}$$

Även här gäller allmänt att om $0 \leq g(x) \leq f(y)$ på intervallet $[a, b]$, och området mellan $y = f(x)$ och $y = g(x)$ roteras runt y-axeln, så blir rotationsvolymen

$$V = 2\pi \int_a^b x(f(x) - g(x))\ dx.$$

Anmärkning 4.10.12

Man kan ibland beräkna rotationer runt y-axeln med hjälp av skivmetoden istället för skalmetoden, om x kan skrivas som funktion av y. Då spelar y-axeln samma roll som x-axeln spelade i det förra avsnittet. Där fick vi ju rotationsvolymen $\pi \int_a^b f(x)^2 - g(x)^2 \, dx$ då området mellan $y = f(x)$ och $y = g(x)$ och med $a \leq x \leq b$ roterades runt x-axeln. Om nu området mellan $x = h(y)$ och $x = j(x)$ och med $c \leq y \leq d$ roteras runt y-axeln, får vi på samma sätt volymen

$$V = \pi \int_c^d h(y)^2 - j(y)^2 \, dy,$$

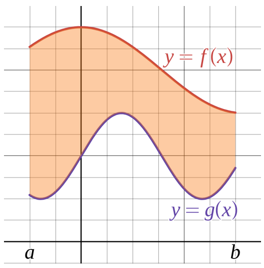
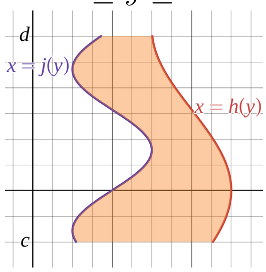
där kurvan $y = j(x)$ är närmast sett från y-axeln

Vi illustrerar anmärkningen genom att beräkna rotationsvolymen från Exempel 4.10.10 igen, denna gång genom att använda att $y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$. Området som ska roteras befinner sig alltså *utanför* $x = e^y$ och *innanför* den lodräta linjen $x = e$, och med $0 \leq y \leq 1$. Volymen blir

$$V = \pi \int_0^1 e^2 - (e^y)^2 \, dy = \pi \int_0^1 e^2 - e^{2y} \, dy = \pi \left(e^2 y - \frac{e^{2y}}{2} \right) \Big|_0^1$$

vilket efter förenkling ger $\frac{e^2+1}{2}\pi$ volymenheter, som väntat.

Variablerna x och y bytte alltså roll med varandra. Något liknande gäller för rotation runt x-axeln. Vi sammanfattar alla möjligheter i en tabell.

Område	$g(x) \leq y \leq f(x)$ $a \leq x \leq b$  	$j(y) \leq x \leq h(y)$ $c \leq y \leq d$ 
Runt x-axeln	$V = \pi \int_a^b f(x)^2 - g(x)^2 \, dx$	$V = 2\pi \int_c^d y(h(y) - j(y)) \, dy$
Runt y-axeln	$V = 2\pi \int_a^b x(f(x) - g(x)) \, dx$	$V = \pi \int_c^d h(y)^2 - j(y)^2 \, dy$

Mer allmänna volymer

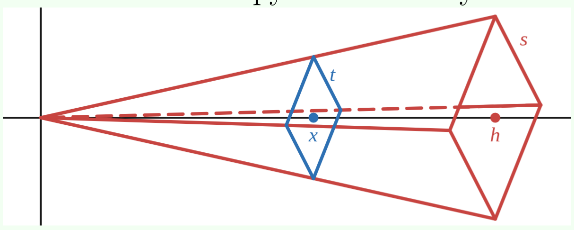
Man kan använda skivmetoden för att beräkna andra volymer än rotationsvolymer. Låt oss blicka tillbaka på formeln

$$V = \int_a^b A(x)\ dx$$

från det avsnittet. Här är $A(x)$ **tvärsnittsarean** av kroppen i fråga, vid position x. För en rotationskropp är tvärsnittet en cirkel, men samma resonemang kan föras oavsett hur tvärsnittet ser ut, så länge tvärsnittsarean $A(x)$ kan integreras, vilket den kan om den är kontinuerlig. Volymen fås alltså att integrera tvärsnittsarean. Vi illustrerar detta med ett exempel.

Exempel 4.10.13

En pyramid har höjden h längdenheter, och en kvadratisk bas med sidan s längdenheter. Beräkna pyramidens volym.



Lösning. Vi lägger ned pyramiden längs den positiva x-axeln, med toppen i origo och på sådant sätt att tvärsnittet vid position x är en kvadrat med en viss sidlängd, som vi kallar för t. Vi använder likformighet för att ta reda på sidan t. Den förhåller sig till bassidan s på samma sätt som x förhåller sig till höjden h. Vi har alltså

$$\frac{t}{s} = \frac{x}{h} \quad \Longleftrightarrow \quad t = \frac{sx}{h}.$$

Tvärsnittsarean är därför

$$A(x) = t^2 = \frac{s^2x^2}{h^2}.$$

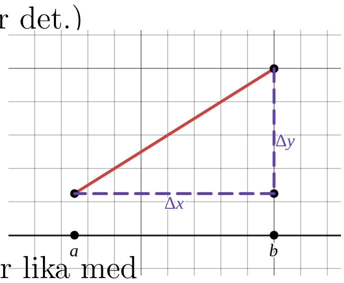
Volymen blir därför

$$\int_0^h \frac{s^2x^2}{h^2}\ dx = \frac{s^2}{h^2}\int_0^h x^2\ dx = \frac{s^2}{h^2}\left(\frac{h^3}{3} - 0\right) = \frac{s^2h}{3}$$

volymenheter, vilket är en bekant formel.

Båglängd

Vi lämnar nu areor och volymer och angriper båglängder. Om f är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$, är frågan alltså hur lång kurvan $y = f(x)$ är mellan $x = a$ och $x = b$. Vi kommer att kunna svara på denna fråga under antagandet att funktionen är kontinuerligt deriverbar på intervallet $[a, b]$, dvs att inte bara funktionen, utan även dess derivata f', är kontinuerlig där. (Vi återkommer till varför detta, något tekniska, krav behövs, men de flesta funktioner vi hanterat hittills uppfyller det.)



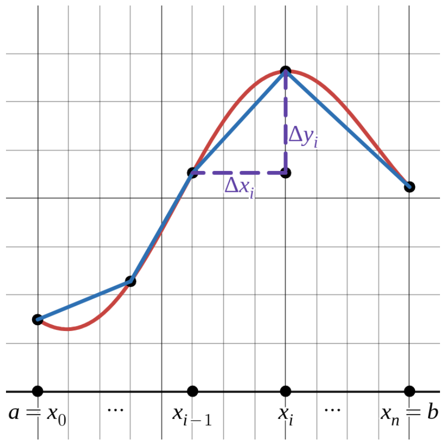
Det enklaste fallet, då kurvan är en rät linje, kan vi beräkna med Pythagoras sats. Med $\Delta x = b - a$ och $\Delta y = f(b) - f(a)$ får vi längden till

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Om vi bryter ut Δx ur detta, ser vi att detta är lika med

$$\sqrt{\left(1 + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}\right)(\Delta x)^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}\right)}\sqrt{(\Delta x)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x,$$

där vi använt att $\Delta x \geq 0$. Här observerar vi att kvoten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ är linjens riktningskoefficient.



I det allmänna fallet har vi en funktion f som är kontinuerligt deriverbar på $[a, b]$ och vill beräkna längden av $y = f(x)$ mellan $x = a$ och $x = b$. Vår metod är att approximera kurvan $y = f(x)$ med räta linjestycken, vars längder vi sedan kan räkna ut med Pythagoras sats. Därför delar vi in intervallet $[a, b]$ i delintervall $[x_{i-1}, x_i]$ med $i = 1, 2 \ldots, n$, och approximerar kurvans längd med

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i,$$

där Δs_i är längden av den räta linje som approximerar kurvan mellan x_{i-1} och x_i. Om delintervallets bredd är $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, och funktionens förändring är $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$, ger Pythagoras sats att

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}.$$

På samma sätt som ovan kan vi skriva om detta som

$$\Delta s_i = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\ \Delta x_i.$$

Funktionens kontinuitet och deriverbarhet gör att vi kan använda medelvärdessatsen på varje delintervall: den genomsnittliga förändringshastigheten $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$ är lika med derivatan $f'(c_i)$ i någon punkt $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, så vi har

$$\Delta s_i = \sqrt{1 + f'(c_i)^2}\ \Delta x_i,$$

och kurvans totala längd approximeras därför av summan

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(c_i)^2}\ \Delta x_i.$$

Vi definierar nu kurvans längd, den så kallade **båglängden** S, genom att använda samma slags gränsvärde som för areor och volymer, där vi låter delintervallen bli allt fler och allt kortare, dvs

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \text{alla}\Delta x_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(c_i)^2}\ \Delta x_i.$$

Enligt ett liknande resonemang som för areor och volymer kan vi leda detta till följande.

Sats 4.18

Om funktionen f är kontinuerligt deriverbar på $[a, b]$, så ges längden av kurvan $y = f(x)$ mellan $x = a$ och $x = b$ av det reella talet

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\ dx.$$

Anmärkning 4.10.14

Det ingår alltså i satsen att integralen är ett väldefinierat reellt tal, dvs att funktionen $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ är integrerbar. Denna funktion är en sammansättning av f' och kontinuerliga funktioner (kvadrering, addition med 1, och rotdragning). Om f' är kontinuerlig på intervallet, så är hela sammansättningen kontinuerlig och därför integrerbar.

Detta motiverar antagandet att inte bara f, utan även f', är kontinuerlig.

Rotuttrycket gör integralen knepig att beräkna för de flesta funktioner, men den kan användas för numerisk integrering med digitala hjälpmedel.

Exempel 4.10.15

Beräkna längden av kurvan $y = \sqrt{1-x^2}$ mellan $y = -1$ och $y = 1$.
Lösning. Om $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ så ger kedjeregeln att $f'(x) = \dfrac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}$, så

$$\sqrt{1+f'(x)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1}{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

som är derivatan av $\arcsin x$. Därför får vi båglängden

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \tfrac{\pi}{2} - (-\tfrac{\pi}{2}) = \pi \text{ le},$$

där **le** står för **längdenheter**. Notera att kurvan i fråga är den övre halvan av enhetscirkeln, och att den har båglängd π ligger till grund för själva definitionen av radianer. Detta exempel ska därför mest ses som en riktighetskontroll av båglängdsberäkningen.

5 Ordinära differentialekvationer

Motivation

Matematiska modeller handlar om att beskriva olika fenomen med matematiska samband. Väldigt ofta beskriver dessa samband hur snabbt storheter förändras, och de innehåller därför funktioner (t ex y) och deras derivator ($y', y'', \ldots$). Låt oss ta några exempel.

- Ekvationen för obegränsad tillväxt $y' = ky$ beskriver en storhet y som ökar i proportion mot dess storlek, med proportionalitetskonstant k. Till exempel kan y vara saldot på ett räntekonto med en ränta på 2%, vilket ger $k = 1.02$.

- Ekvationen för logistisk tillväxt $y' = ky(L - y)$ beskriver t ex en djurpopulation y som lever med begränsade resurser, så att det finns en maximal kapacitet L. Tillväxten är proportionell mot antalet individer y (för förökningens skull) multiplicerad med den kvarvarande kapaciteten $L - y$ (på grund av de begränsade resurserna).

- Newtons andra lag $F = ma$ beskriver kraften F som proportionell mot accelerationen a, som ju är andraderivatan av positionen hos en partikel. Proportionalitetskonstanten m är partikelns massa.

- Om en pendel svänger under inverkan av gravitationen, uppfyller svängningsvinkeln y sambandet $y'' + \frac{\ell}{g}\sin y = 0$, där ℓ är pendelns längd och g är gravitationskonstanten. Genom linjarisering (se Avsnitt 2.14) kan man approximera detta med det enklare sambandet $y'' + \frac{\ell}{g}y = 0$, om vinkeln y är liten. Liknande ekvationer beskriver andra typer av svängning, som t ex fjäderrörelse.

- Enligt den så kallade SIR-modellen för smittspridning sprids en sjukdom enligt sambandet $\frac{dI}{dt} = \frac{\beta IS}{N} - \gamma I$, där I är antalet redan smittade,

S är antalet som ännu kan smittas, och $N = S + I$ det totala antalet människor i gruppen. Parametrarna β och γ är olika för olika sjukdomssituationer.

- När en balk av t ex metall utsätts för en belastning leder det till att den böjs. Böjningen w är en funktion av positionen x på balken, och uppfyller sambandet $cw^{(4)}(x) = q(x)$, där konstanten c beskriver balkens stelhet, och $q(x)$ är belastningen. Notera alltså att det är fjärdederivatan som ingår.

Alla dessa samband är exempel på **ordinära differentialekvationer**. De anger villkor som en storhet (t ex saldot y på ett räntekonto) måste uppfylla enligt en viss modell. Sambandet ges i termer av derivator, och är i den meningen implicit. Att lösa en differentialekvation innebär att hitta ett explicit uttryck för storheten (t ex en explicit funktion som beskriver saldot $y(t)$ vid tiden t). Med de verktyg vi har samlat på oss under kursens gång kan vi nu hantera och i många fall lösa sådana differentialekvationer: att hantera dem kräver en förståelse av derivatan, och lösningsmetoderna, som vi strax kommer att se, använder sig av integration och serierepresentation. Vår framställning kommer att vara helt matematisk och inte kräva någon förståelse av tillämpningar och modeller, men ge oss verktyg att hantera sådana modeller i andra vetenskaper.

5.1 Grundläggande definitioner

En **ordinär differentialekvation (ODE)** är en ekvation där en funktion y i en variabel x, funktionens derivator $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ och variabeln själv ingår. En sådan ekvation kan skrivas på formen

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

där vänsterledet är något uttryck. (Man kan alltid sätta högerledet lika med 0 genom att flytta över alla termer till vänsterledet.) Man säger att ODEn är **av ordning** n om den högsta förekommande derivatan är $y^{(n)}$.

Exempel 5.1.1

- Ekvationen $y' = ky$, dvs $y' - ky = 0$, är en ODE av ordning 1.
- Ekvationen $y'' + \frac{\ell}{g} \sin y = 0$ är en ODE av ordning 2.

- Ekvationen $cw^{(4)}(x) = q(x)$ är en ODE av ordning 4.
- Ekvationen $\sin(y''') - e^x y'' + yx^2 = 0$ är en ODE av ordning 3.

Anmärkning 5.1.2: Några ord om terminologin

Att en sådan ekvation kallas för en *differentialekvation* beror på att derivatorna ingår: att differentiera är, på flera språk och i vissa sammanhang på svenska, ett annat ord för att derivera. Adjektivet *ordinär* har att göra med att derivatan är den "vanliga" derivatan av en funktion i en variabel. Detta är i kontrast mot *partiella differentialekvationer*, där funktionerna som ingår är funktioner av flera variabler, och derivatorna är derivator i en variabel åt gången. Sådana derivator kallas för partiella derivator och är ett grundläggande koncept i i flervariabelanalys; därför är det inte en del av denna kurs.

Vårt mål är att lösa ordinära differentialekvationer. Låt oss precisera vad det innebär.

Definition 5.1

En **lösning** till ODEn $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ är en funktion $y = y(x)$ som uppfyller ODEn för alla x på något intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Att **lösa en ODE** innebär att hitta *alla* lösningar till ODEn. Man säger då även att man hittar den **allmänna lösningen** till ODEn.

Man skriver alltså ofta lösningen som $y = y(x)$ istället för t ex $y = f(x)$ för enkelhets skull. För att $y(x)$ ska kunna vara en lösning till en ODE på något intervall, måste alla derivator som ingår i ODEn vara definierade på intervallet; annars kan de förstås inte uppfylla ekvationen.

Exempel 5.1.3

Visa att $y = e^{3x^2}$ är en lösning till ODEn $\dfrac{xy'}{y} - 6x^2 = 0$ på hela $\mathbb{R}$.

Bevis. För att visa att en funktion är en lösning till en ODE behöver vi, per definition, bara derivera och sätta in funktionen i ODEn och kontrollera att den är uppfylld. Om $y = e^{3x^2}$ ger kedjeregeln att $y' = 6xe^{3x^2}$, så

$$\frac{xy'}{y} - 6x^2 = \frac{x6xe^{3x^2}}{e^{3x^2}} - 6x^2 = 6x^2 - 6x^2 = 0,$$

så vänsterledet är lika med högerledet för alla $x \in \mathbb{R}$, och ekvationen är uppfylld på hela $\mathbb{R}$, vilket skulle visas.

Exempel 5.1.4

Lös ODEn $y' = 2x$ på $\mathbb{R}$, dvs bestäm alla lösningar, dvs alla funktioner $y(x)$ som uppfyller $y'(x) = 2x$ på något intervall.
Lösning. Att $y' = 2x$ är ekvivalent med att y är en primitiv funktion till $2x$. Alla lösningar, dvs alla primitiva funktioner till $2x$, ges av $y(x) = \int 2x\, dx = x^2 + C$, där $C \in \mathbb{R}$.
Svar. Den allmänna lösningen till ODEn $y' = 2x$ är $y = x^2 + C$, där $C \in \mathbb{R}$.

Notera att för varje $C \in \mathbb{R}$ uppfyller $y = x^2 + C$ ODEn överallt på $\mathbb{R}$, och därför också på varje intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

Exempel 5.1.5

ODEn $y' = -\dfrac{1}{x^2}$ har den allmänna lösningen

$$y = \frac{1}{x} + C, \qquad C \in \mathbb{R},$$

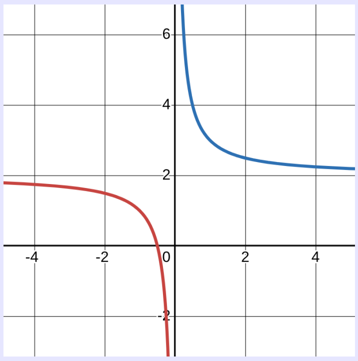
som alltså är den allmänna primitiva funktionen till $-\frac{1}{x^2}$. För varje C är $\frac{1}{x} + C$ definierad på intervallet $(0, \infty)$ eller på $(-\infty, 0)$, men inte på hela $\mathbb{R}$. Ingen funktion kan uppfylla ODEn på hela $\mathbb{R}$ eftersom ODEn är odefinierad då $x = 0$.

Anmärkning 5.1.6: Vad är alltså en lösning till en ODE?

Observera att en lösning till en ODE är en **funktion**. I Exempel 5.1.4 var funktionen $y(x) = x^2 + C$ en lösning för varje reellt värde på C; exempelvis är $y(x) = x^2 + 7$ en lösning. Det handlar alltså inte om att hitta ett värde på x som löser ekvationen (som fallet är i algebraiska ekvationer), utan om att hitta alla funktioner som sambandet håller för på det aktuella intervallet.

Detta har stor betydelse i matematisk modellering. Att t ex en planetbana bestäms av en matematisk modell som består av en ODE, innebär att hela planetbanan modelleras som *en* lösning till denna ODE. Varje lösning ger en möjlig planetbana.

Observera också att lösningar kan uppfylla en ODE på olika intervall. De betraktas då som olika, även om de ibland ges av samma uttryck (dvs samma formel). I exemplet ovan är $\frac{1}{x} + 2$ på intervallet $(0, \infty)$ en lösning, och $\frac{1}{x} + 2$ på intervallet $(-\infty, 0)$ en annan. Båda ser vi i figuren till höger.



Det finns ingen allmän lösningsmetod som fungerar för alla ordinära differentialekvationer. I allmänhet finns det inget sätt att hitta en explicit formel för $y(x)$. Dock finns det praktiska metoder för att lösa flera olika typer av ordinära differentialekvationer, varav många förekommer i vanliga matematiska modeller. Målet med detta kapitel är att lära oss använda dessa metoder, och slutligen gå igenom en metod som *i princip* fungerar i ganska stor allmänhet.

5.2 Separabla ODE av första ordningen

Vi börjar med att lösa differentialekvationer av ordning 1 som är separabla. En **separabel ODE av ordning 1** är en ODE på formen

$$y' = f(x)g(y) \qquad \text{det vill säga} \qquad \frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

där f och g är givna funktioner. Sådana ekvationer kallas separabla eftersom man kan separera variablerna x och y, så att de står på olika sidor om likhetstecknet. Vi kommer att lösa dem under antagandet att f och g är kontinuerliga, och $g(y) \neq 0$. (Mer precist söker vi alltså alla lösningar $y = y(x)$ där x är sådant att dessa villkor är uppfyllda.)

Låt oss se hur det fungerar i ett exempel som inspirerar till en allmän metod.

Exempel 5.2.1

Vi vill lösa ODEn $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^2}$, dvs hitta alla $y = y(x)$ som uppfyller detta samband på något intervall. På detta intervall måste alltså alla delar av ekvationen vara kontinuerliga, och $y \neq 0$ (på grund av divisionen med y^2).

ODEn $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^2}$ är separabel, eftersom $\frac{2x}{y^2} = 2x \cdot \frac{1}{y^2}$. För att lösa den flyttar vi över y-faktorn till vänsterledet, dvs

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot \frac{1}{y^2} \iff y^2 \frac{dy}{dx} = 2x.$$

Vi integrerar nu båda leden: två funktioner som är kontinuerliga på ett intervall är lika på intervallet om och endast om deras allmänna primitiva funktioner är lika på intervallet, så vår ekvation är ekvivalent med

$$\int y^2 \frac{dy}{dx}\, dx = \int 2x\, dx.$$

Vi beräknar nu båda integraler. Högerledet är enklare och vi får

$$\int 2x\, dx = x^2 + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}.$$

I vänsterledet har vi y som är en funktion av x, och derivatan $\frac{dy}{dx}$. Att vi har denna inre derivata gör att vi kan göra ett variabelbyte, dvs en substitution, så att vi får en integral med avseende på y, dvs

$$\int y^2 \frac{dy}{dx}\, dx = \boxed{\begin{array}{l} y = y \\ dy = \frac{dy}{dx}\, dx \end{array}} = \int y^2\, dy = \frac{y^3}{3} + C_2, \qquad C_2 \in \mathbb{R}.$$

(En närmare förklaring kommer i nästa anmärkning.) Då vänsterled är lika med högerled gäller alltså

$$\frac{y^3}{3} + C_2 = x^2 + C_1 \iff y^3 = 3x^2 + 3C_2 - 3C_1.$$

Vi kallar $3C_2 - 3C_1$ för C, som också är en allmän reell konstant, och får alltså

$$y^3 = 3x^2 + C.$$

Detta är ekvivalent med $y = (3x^2 + C)^{\frac{1}{3}}$, som är den allmänna lösningen.

Svar. Alla lösningar till ODEn ges av $y = (3x^2 + C)^{\frac{1}{3}}, \qquad C \in \mathbb{R}$.

Anmärkning 5.2.2

Substitutionen i förra exemplet ser något märklig ut. I tidigare substitutioner har vi infört en ny variabel y för att ersätta ett (krångligt) uttryck $h(x)$, i stil med

$$\int h(x)^2 \frac{dy}{dx}\ dx = \boxed{\begin{array}{l} y = h(x) \\ dy = \dfrac{dy}{dx}\ dx \end{array}} = \int y^2\ dy.$$

Det som skedde nu är precis samma sak, med skillnaden att uttrycket nu redan står som just y istället för $h(x)$. Därför ser substitutionen ut som att man inte ändrat något. Det viktiga är att $dy = \frac{dy}{dx}\ dx$, vilket vi argumenterade för i Avsnitt 4.5. Det ser ut som en förkortning av bråk, men det är det inte det, eftersom $\frac{dy}{dx}$ inte är ett bråk.

Argumentet från Avsnitt 4.5 handlar om att derivera resultatet $\frac{y^3}{3} + C_2$: deriverar vi med avseende på y så får vi

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{y^3}{3} + C_2\right) = y^2,$$

vilket innebär att

$$\int y^2\ dy = \frac{y^3}{3} + C_2.$$

Deriverar vi istället med avseende på x så måste vi använda kedjeregeln, som ger

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y^3}{3} + C_2\right) = y^2\frac{dy}{dx},$$

vilket innebär att

$$\int y^2\frac{dy}{dx}\ dx = \frac{y^3}{3} + C_2.$$

Båda integralerna är därför lika.

Eftersom vi alltid kan skriva $\frac{dy}{dx}dx = dy$ innanför integralen, och integrera med avseende på y, brukar man göra omskrivningen direkt i det första steget. I exemplet ovan får vi

$$y^2\frac{dy}{dx} = 2x \iff y^2\frac{dy}{dx}\ dx = 2x\ dx \iff y^2\ dy = 2x\ dx.$$

Då kan man direkt integrera vänsterledet med avseende på y, och högerledet med avseende på x. För oss är det bara notation, eftersom vi inte definierat vad dy och dx betyder utanför integraler. Som vi nämnt tidigare i Anmärkning 4.5.4 kan man definiera sådana *differentialer* precist, men det går utanför denna kurs.

Metoden i exemplet används för att lösa separabla ordinära differentialekvationer i allmänhet. Vi sammanfattar den här.

Idé

För att lösa ODEn $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ på ett intervall där f och g är kontinuerliga och $g(y) \neq 0$:

1. *Separera* variablerna: $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \iff \frac{1}{g(y)}\ dy = f(x)\ dx.$
2. *Integrera* båda sidor: $\int \frac{1}{g(y)}\ dy = \int f(x)\ dx.$
3. *Simplifiera* (förenkla) och lös om möjligt ut y i termer av x.
4. *Kontrollera* lösningen genom att derivera och sätta in i ODEn.

Exempel 5.2.3

Låt oss gå igenom Exempel 5.2.1 igen på detta mer systematiska sätt. Vi vill lösa ODEn $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^2}$.

Först separerar vi variablerna enligt

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot \frac{1}{y^2} \quad\iff\quad y^2\frac{dy}{dx} = 2x \quad\iff\quad y^2\ dy = 2x\ dx.$$

(Här har vi redan genomfört variabelbytet $\frac{dy}{dx}dx = dy$ i vänsterledet.)

Sedan integrerar vi vänsterledet med avseende på y och högerledet med avseende på x:

$$\begin{aligned} \int y^2\, dy = \int 2x\, dx \qquad &\iff \\ \frac{y^3}{3} + C_2 = x^2 + C_1 \qquad &\iff \\ \frac{y^3}{3} = x^2 + C \qquad & C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ur detta löser vi ut y enligt $y = (3x^2 + C)^{\frac{1}{3}}$.

Det återstår att kontrollera lösningarna genom att derivera och sätta in i $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^2}$. Deriverar vi $y = (3x^2 + C)^{\frac{1}{3}}$ enligt kedjeregeln får vi

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{3}(3x^2 + C)^{-\frac{2}{3}} \cdot 6x = 2x(3x^2 + C)^{-\frac{2}{3}}$$

medan

$$\frac{2x}{y^2} = \frac{2x}{\left((3x^2 + C)^{\frac{1}{3}}\right)^2} = \frac{2x}{(3x^2 + C)^{\frac{2}{3}}} = 2x(3x^2 + C)^{-\frac{2}{3}}$$

Vänsterled och högerled är lika, så länge $y \neq 0$, vilket vi utgår ifrån eftersom y står i nämnaren i den givna ODEn. Funktionen $y = (3x^2 + C)^{\frac{1}{3}}$ är därmed en lösning på varje intervall där x uppfyller $(3x^2 + C)^{\frac{1}{3}} \neq 0$.

Exempel 5.2.4

Lös ODEn $\frac{dy}{dx} = 6y^3x^2$ under antagandet att $y \neq 0$.

Lösning. Vi separerar variablerna enligt

$$\frac{dy}{dx} = 6y^3x^2 \iff \frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx} = 6x^2 \iff \frac{1}{y^3}\, dy = 6x^2\, dx$$

där divisionen med y^3 inte orsakar problem då vi antagit att $y \neq 0$. Sedan integrerar vi. Vänsterledet ger

$$\int \frac{1}{y^3}\, dy = \int y^{-3}\, dy = \frac{y^{-2}}{-2} + C_1 = -\frac{1}{2y^2} + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Högerledet ger

$$\int 6x^2\,dx = 2x^3 + C_2, \qquad C_2 \in \mathbb{R}.$$

ODEn är därför ekvivalent med

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2y^2} + C_1 = 2x^3 + C_2 &\iff \\
\frac{1}{2y^2} = -2x^3 + \underbrace{C_1 - C_2}_{C} &\iff \\
2y^2 = \frac{1}{C - 2x^3} &\iff \\
y = \frac{1}{\sqrt{2C - 4x^3}} &\quad \text{eller} \quad y = -\frac{1}{\sqrt{2C - 4x^3}}
\end{aligned}$$

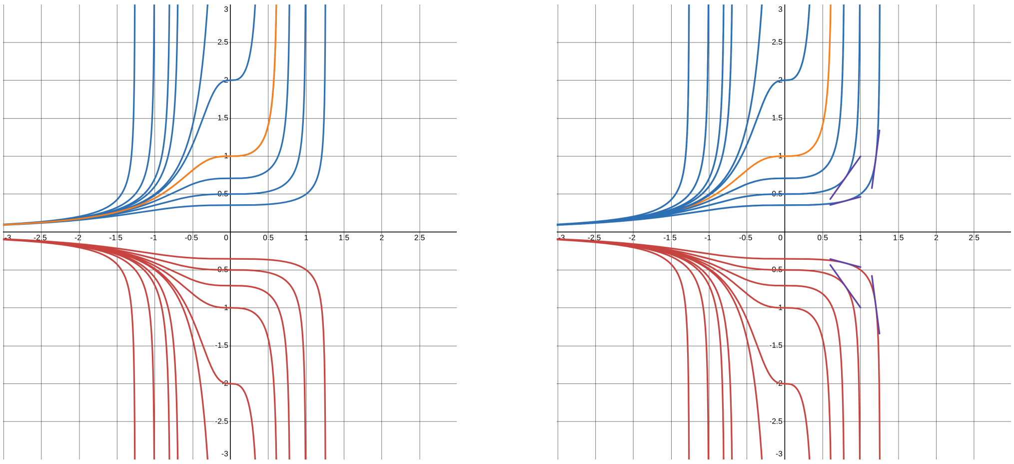
Svar. Alla lösningar (med $y \neq 0$) till ODEn ges av

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2C - 4x^3}}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Vi lämnar kontrollen som övning; notera att man i princip får göra två kontroller, en för de positiva och en för de negativa lösningarna.

Notera här att vi inte kunde lösa ut y som en funktion av x för varje C, utan det fanns två möjligheter beroende på tecken. I allmänhet finns det finns ingen garanti för att lösningen är en funktion av x som är definierad överallt. I de fall vi går igenom är lösningen definierad i något intervall.

Låt oss rita upp lösningarna $\frac{1}{\sqrt{2C-4x^3}}$ och $-\frac{1}{\sqrt{2C-4x^3}}$ för några olika värden på konstanten C. En av lösningarna har vi färgat orange.



Några saker är värda att uppmärksamma:

- Varje lösning är definierad på ett intervall, men intervallen ser olika ut för olika lösningar. I detta exempel beror det på att $\sqrt{2C - 4x^3}$ endast är definierad där $2C - 4x^3 \geq 0$, och vilka x som uppfyller detta beror på vad C är.

- Kurvorna kan se väsentligt olika ut; de är inte bara förskjutna i höjdled i förhållande till varandra, som det skulle ha varit om konstanten C hade adderats på slutet.

- Detta leder oss till att reflektera över vad ODEn egentligen säger: den är ett villkor på derivatan, dvs tangentens lutning, till varje kurva i varje punkt. Vi har markerat villkoret $\frac{dy}{dx} = 6y^3x^2$ i några punkter i figuren till höger. ODEn säger alltså att $y = y(x)$ är en lösning som går genom punkten (x, y) om och endast om lösningskurvans tangent i den punkten har lutningen $6y^3x^2$. Detta synsätt är användbart i många tillämpningar. Man kan t ex tänka sig att ODEn beskriver ett magnetfält, och då är lösningskurvorna de vägar en järnpartikel skulle färdas i det magnetfältet. I varje punkt på en lösningskurva talar magnetfältet (dvs ODEn) om vilka riktningar partikeln kan röra sig.

Ibland är man särskilt intresserad av en lösning som går igenom en viss punkt. Vi har till exempel markerat den lösning som uppfyller $y(0) = 1$. Ett sådant villkor kallas för ett **begynnelsevillkor** eller ett **randvillkor**. Ett **begynnelsevärdesproblem** är en ODE tillsammans med ett sådant begynnelsevillkor. Med hjälp av detta villkor kan man bestämma värdet på konstanten. Vi illustrerar med vårt exempel.

Exempel 5.2.5

Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 6y^3x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(fortfarande under antagandet att $y \neq 0$).
Lösning. Vi börjar med att lösa ODEn, som den ODE vi löste i Exempel 5.2.4. Där fick vi den allmänna lösningen

$$y(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{2C - 4x^3}}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ utesluter de negativa lösningarna, eftersom $1 > 0$, så

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2C - 4x^3}}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Dessutom måste $y(0) = 1$. Insättning ger

$$y(0) = \frac{1}{\sqrt{2C - 4 \cdot 0^3}} = \frac{1}{\sqrt{2C}}.$$

vilket är lika med 1 om och endast om $\sqrt{2C} = 1 \iff 2C = 1 \iff C = \frac{1}{2}$
Svar. Lösningen är $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 4x^3}}$.

Detta är alltså den orangefärgade lösningen i figurerna ovan.

Exempel 5.2.6

Lös ODEn $\dfrac{dy}{dt} = ky$, där $k \in \mathbb{R}$ är en konstant.
Lösning. Vi separerar variablerna enligt

$$\frac{dy}{dt} = ky \iff \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = k \iff \frac{1}{y}\,dy = k\,dt,$$

förutsatt att $y \neq 0$; vi återkommer till detta senare.
Sedan integrerar vi vänsterledet med avseende på y:

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \ln|y| + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

och högerledet med avseende på t

$$\int k\, dt = kt + C_2, \qquad C_2 \in \mathbb{R},$$

så ODEn är ekvivalent med

$$\ln|y| + C_1 = kt + C_2 \iff \ln|y| = kt + \underbrace{C_2 - C_1}_{C}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Nu vill vi lösa ut y från $\ln|y| = kt + C$. Per definition av ln är detta ekvivalent med

$$|y| = e^{kt+C} = e^{kt}e^{C} \iff y = \pm e^{C}e^{kt}\ .$$

Om C är en allmän reell konstant, så är $e^C > 0$ en allmän positiv konstant på grund av exponentialfunktionens egenskaper, och $\pm e^C$ kan därför ersättas med en nollskild reell konstant D, dvs $y = De^{kt}$ med $D \neq 0$.

Vad händer då $D = 0$? Då är $y = 0$, vilket vi tillfälligt uteslöt tidigare. Vi kontrollerar om $y = 0$ är en lösning: med $y = 0$ är både $\dfrac{dy}{dt} = 0$ och $ky = 0$, så differentialekvationen $\dfrac{dy}{dt} = ky$ är uppfylld. Därför är den allmänna lösningen $y = De^{kt}$ där $D \in \mathbb{R}$ är en allmän konstant.

Svar. Den allmänna lösningen är $y = De^{kt}, \qquad D \in \mathbb{R}$.

Kontroll. Med $y = De^{kt}$ får vi $\dfrac{dy}{dt} = kDe^{kt} = ky$, så ODEn är uppfylld.

Anmärkning 5.2.7

Exempel 5.2.6 är den kanske viktigaste typen av ODE, och det första exemplet vi nämnde i introduktionen. Låt oss reflektera över ODEn och dess lösning. Vi tänker oss att $y(t)$ beskriver en viss storhet vid tiden t. Att $y' = ky$ betyder att förändringshastigheten i y är proportionell mot y. Om $k > 0$ betyder detta att ju större y är, desto snabbare ökar det, så det vi får ett ohämmat tillväxtbeteende. Detta händer i t ex en djurpopulation med obegränsad tillgång på resurser: ju fler individer som finns, desto snabbare kan de föröka sig, vilket leder till ännu fler individer, som förökar sig ännu snabbare, osv. Detta är just exponentiell tillväxt enligt lösningen $y = De^{kt}$. (Om $k < 0$ får man ett liknande beteende med avtagande istället för tillväxt.) Vilken betydelse har konstanten D? Det återkommer vi till i nästa exempel!

Nästa exempel motiverar namnet *begynnelsevillkor*.

Exempel 5.2.8

I ett experiment får en bakteriekultur växa enligt ODEn $\dfrac{dy}{dt} = 5y$, där $y = y(t)$ är kulturens volym (i milliliter) vid tiden t. När experimentet börjar (dvs i begynnelsen), vid tiden $t = 0$, är volymen 7 milliliter. Bestäm $y(t)$.

Lösning. Vi ska alltså lösa Begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 5y \\ y(0) = 7 \end{cases}$$

och noterar att ODEn $\dfrac{dy}{dt} = 5y$ är samma ODE som i Exempel 5.2.6 med $k = 5$. Den allmänna lösningen är därmed $y(t) = De^{5t}$, där $D \in \mathbb{R}$. För att tillämpa villkoret sätter vi in $t = 0$ och får

$$y(0) = De^{5 \cdot 0} = D \cdot 1 = D$$

så villkoret $y(0) = 7$ är ekvivalent med $D = 7$. Detta bestämmer konstanten D.

Svar. Volymen vid tiden t ges av $y(t) = 7e^{5t}$ milliliter.

5.3 Linjära ODE av första ordningen

Definition 5.2

En **linjär ODE** är en ODE på formen

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y = b(x),$$

där $a_n, \ldots, a_0$ och b är givna funktioner. Om högerledet $b(x)$ är konstant noll säger vi att ekvationen är **homogen**, annars är den **inhomogen**.

Observera att funktionerna $a_n, \ldots, a_0$ och b inte behöver vara linjära funktioner. Däremot är de bara funktioner av x, så termerna är "linjära i y och dess derivator", så att y, y', y'' osv alltid står utanför dessa funktioner.

Exempel 5.3.1

- Ekvationen $y' + 3x^2y = x^2$ är en inhomogen, linjär ODE av ordning 1.
- Den tidigare nämnda pendelekvationen $y'' + \frac{\ell}{g}\sin y = 0$ är inte linjär, pga $\sin y$-termen, men den approximerade varianten $y'' + \frac{\ell}{g}y = 0$ är en homogen, linjär ODE av ordning 2.

Pendelekvationen och liknande linjära ekvationer av andra ordningen kommer vi att behandla i nästa avsnitt.

I detta avsnitt kommer vi att utarbeta en lösningsmetod för linjära ODE av ordning 1. En sådan ODE har alltså formen

$$a_1(x)y'(x) + a_0(x)y = b(x).$$

Genom att dividera med $a_1(x)$ kan vi förenkla detta till

$$y'(x) + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = \frac{b(x)}{a_1(x)}$$

där $a_1(x) \neq 0$ (där $a_1(x) = 0$ försvinner y'-termen och vi har inte längre någon differentialekvation av första ordningen). Det räcker därför att lära sig hantera differentialekvationer på formen

$$y' + f(x)y = g(x).$$

Vi kommer att ta fram en lösningsmetod för sådan ekvationer, där f och g är kontinuerliga funktioner.

Vi börjar med ett exempel som inspirerar den allmänna metoden.

Exempel 5.3.2

För att lösa $y' + 3x^2 y = x^2$, beräknar vi först en primitiv funktion till $3x^2$ (dvs till funktionen framför y). En sådan primitiv funktion är x^3. Vi multiplicerar sedan båda leden med $e^{(x^3)}$:

$$y' + 3x^2 y = x^2 \iff e^{x^3} y' + e^{x^3} 3x^2 y = e^{x^3} x^2.$$

Anledningen till att vi gjorde detta är att vänsterledet nu är derivatan av produkten $e^{x^3} y$, eftersom produktregeln ger

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x^3} y\right) = e^{x^3} y' + e^{x^3} 3x^2 y.$$

Vår ODE är alltså ekvivalent med

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x^3} y\right) = e^{x^3} x^2,$$

dvs att högerledet är derivatan av $e^{x^3} y$, eller med andra ord att $e^{x^3} y$ är en primitiv funktion till högerledet, dvs

$$e^{x^3} y = \int e^{x^3} x^2 \, dx.$$

Så vi kan lösa ut y enligt

$$y = \frac{1}{e^{x^3}} \int e^{x^3} x^2 \, dx.$$

För att lösa ODEn behöver vi alltså beräkna denna integral. Med substitution får vi

$$\int e^{x^3} x^2 \, dx = \boxed{\begin{array}{l} u = x^3 \\ \frac{du}{dx} = 3x^2 \\ \frac{1}{3} du = x^2 dx \end{array}} = \int \tfrac{1}{3} e^u \, du = \tfrac{1}{3} e^u + C = \tfrac{1}{3} e^{x^3} + C, \; C \in \mathbb{R}.$$

och därmed är

$$y = \frac{1}{e^{x^3}} \left(\tfrac{1}{3} e^{x^3} + C\right) = \tfrac{1}{3} + C e^{-x^3}, \qquad C \in \mathbb{R}$$

den allmänna lösningen till ODEn.
Kontroll. Deriverar vi $y = \frac{1}{3} + Ce^{-x^3}$ får vi $y' = -3x^2Ce^{-x^3}$, och sätter in detta i ODEn får vi vänsterledet

$$y' + 3x^2y = \cancel{-3x^2Ce^{-x^3}} + 3x^2\left(\tfrac{1}{3} + \cancel{Ce^{-x^3}}\right) = \tfrac{1}{3}3x^2 = x^2,$$

vilket är lika med högerledet.

Att vi multiplicerade med $e^{F(x)}$, där $F(x) = x^3$ är en primitiv funktion till faktorn framför y, gjorde alltså att hela vänsterledet blev en derivata av något (nämligen av $e^{F(x)}y$). Tack vare detta kunde vi sedan integrera (och lösa ut y) för att lösa ODEn. Faktorn $e^{F(x)}y$ kallas därför för en **integrerande faktor** eftersom den gjorde att vi kunde integrera ekvationen. Denna metod kan användas i allmänhet, och vi sammanfattar den här.

Idé

För att lösa ODEn $y' + f(x)y = g(x)$, multiplicera båda led med $e^{F(x)}$, där $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$. Detta ger den ekvivalenta ODEn

$$e^{F(x)}y' + e^{F(x)}f(x)y = e^{F(x)}g(x).$$

Enligt produktregeln är vänsterledet derivatan av $e^{F(x)}y$, så ODEn är ekvivalent med

$$\frac{d}{dx}\left(e^{F(x)}y\right) = e^{F(x)}g(x).$$

Att högerledet är lika med derivatan av $e^{F(x)}y$ är detsamma som att $e^{F(x)}y$ är en primitiv funktion till högerledet, dvs

$$e^{F(x)}y = \int e^{F(x)}g(x)\,dx \iff y = \frac{1}{e^{F(x)}}\int e^{F(x)}g(x)\,dx.$$

Alla lösningar till ODEn ges därmed av

$$y = e^{-F(x)}\int e^{F(x)}g(x)\,dx.$$

där alltså en allmän konstant $C \in \mathbb{R}$ ingår i den obestämda integralen.

Vi har därmed bevisat följande.

Sats 5.3

Antag att f och g är kontinuerliga på ett intervall. På detta intervall ges alla lösningar till ODEn

$$y' + f(x)y = g(x)$$

av

$$y = e^{-F(x)} \int e^{F(x)} g(x)\, dx,$$

där F är en primitiv funktion till f på intervallet.

I förra avsnittet löste vi ODEn $y' = ky$, där k är en reell konstant, genom att först konstatera att den är separabel. Den är faktiskt också linjär, vilket visar sig leda till en enklare lösningsgång. Detaljerna följer i nästa exempel.

Exempel 5.3.3

Lös ODEn $y' = ky$ där $k \in \mathbb{R}$ är en konstant.
Lösning. ODEn är ekvivalent med $y' - ky = 0$, dvs $y' + (-k)y = 0$. (Observera tecknet; på grund av att metoden bygger på produktregeln måste vi ha addition och inte subtraktion mellan termerna.) Den är linjär och vi löser den med hjälp av en integrerande faktor. En primitiv funktion till $-k$ är $-kx$, vilket ger integrerande faktor e^{-kx}. ODEn är alltså ekvivalent med

$$e^{-kx}y' + e^{-kx}(-k)y = \cancel{e^{-kx}}0.$$

Enligt produktregeln är detta ekvivalent med

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-kx}y\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-kx}y = \int 0\, dx,$$

och eftersom $\int 0\, dx = 0 + C$ där $C \in \mathbb{R}$ är detta ekvivalent med

$$e^{-kx}y = C \quad \Longleftrightarrow \quad y = Ce^{kx}.$$

Svar. Den allmänna lösningen ges av $y = Ce^{kx}$, där $C \in \mathbb{R}$. Detta är naturligtvis samma lösning som vi fick med variabelseparation.

Anmärkning 5.3.4

Vissa ODE är alltså både separabla och linjära, medan andra bara är separabla eller bara linjära. I någon mening är de flesta ODE av första ordningen tyvärr varken separabla eller linjära, men många ekvationer som förekommer i viktiga tillämpningar är separabla eller linjära. Om en ODE inte är linjär kan man dessutom använda linjarisering för att approximera den med en linjär ODE. Detta går utanför denna kurs, men visar på att det är användbart att kunna hantera linjära ODE.

Exempel 5.3.5

Antag att $x > 0$. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{x} = \cos x, \\ y(2\pi) = 0. \end{cases}$$

Lösning. Vi börjar med att lösa ODEn. Den är linjär (då $\frac{y}{x} = \frac{1}{x}y$), och vi använder integrerande faktor. En primitiv funktion till $\frac{1}{x}$ är $\ln x$ (eftersom $x > 0$ behövs inget absolutbelopp), så en integrerande faktor är $e^{\ln x} = x$. Multiplicerar vi båda led med x får vi

$$xy' + x\tfrac{y}{x} = x\cos x \iff xy' + y = x\cos x.$$

Vänsterledet är som vanligt lika med $\dfrac{d}{dx}(xy)$, så ODEn är ekvivalent med

$$xy = \int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

där vi använt partiell integration för att beräkna integralen (se Exempel 4.6.3). Vi har alltså den allmänna lösningen

$$y(x) = \frac{x\sin x + \cos x + C}{x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Nu sätter vi in $x = 2\pi$ för att bestämma C med hjälp av begynnelsevillkoret. Vi har

$$y(2\pi) = \frac{2\pi\sin 2\pi + \cos 2\pi + C}{2\pi} = \frac{0 + 1 + C}{2\pi},$$

så $y(2\pi) = 0$ gäller om och endast om $C = -1$.

Svar. Lösningen är $y(x) = \dfrac{x \sin x + \cos x - 1}{x}$.

Kontroll. Vi lämnar det som övning att kontrollera att lösningen uppfyller ODEn och begynnelsevillkoret.

Anmärkning 5.3.6: Var hamnar integrationskonstanten?

Som vi har sett innehåller den allmänna lösningen till en ODE av första ordningen en allmän konstant, integrationskonstanten. Som vi sett förr hamnar den konstanten inte alltid "längst ut", dvs det är inte så enkelt som att addera den på slutet. Detta beror på att integrationen — både i det linjära och separabla fallet — inte är det sista steget, vilket leder till att konstanten är mer "inklämd" i lösningen.

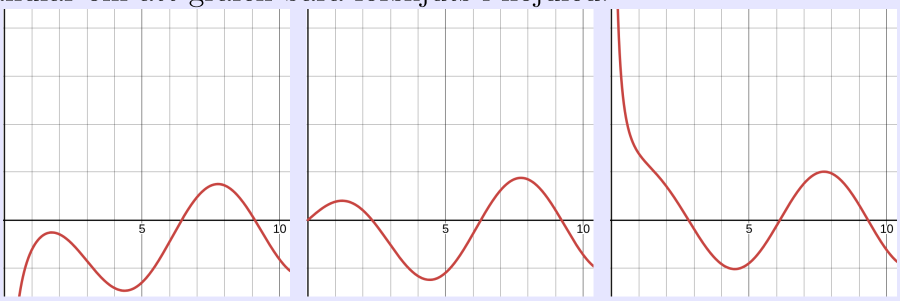
Låt oss titta på det förra exemplet, där den allmänna lösningen till ODEn var

$$y(x) = \frac{x \sin x + \cos x + C}{x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Detta är inte detsamma som $\dfrac{x \sin x + \cos x}{x} + C$; de två uttrycken sammanfaller bara då $C = 0$. I figuren nedan ser vi grafen till

$$y(x) = \frac{x \sin x + \cos x + C}{x}$$

med tre olika värden på C: till vänster $C = -2$, i mitten $C = -1$ (vilket behövdes för begynnelsevillkoret ovan), och till höger $C = 0$. Man ser att olika värden på C ger olika utseende på grafen, som inte handlar om att grafen bara förskjuts i höjdled.



Exempel 5.3.7

Lös ODEn $y'' = ky'$, där $k \neq 0$ är en reell konstant.
Lösning. Detta är visserligen en ODE av ordning 2, men eftersom det bara är y' och y'' som ingår, och y'' är derivatan av y' kan vi se den som en ODE av ordning 1 i y', dvs

$$(y')' = ky'.$$

Med andra ord kan man kalla y' för z. Då har vi

$$z' = kz.$$

Denna ODE har vi löst förut och den allmänna lösningen är $z = Ce^{kx}$, där $C \in \mathbb{R}$. Eftersom $z = y'$ innebär detta alltså att $y' = Ce^{kx}$. För att från detta få y behöver vi integrera igen, vilket ger

$$y = \int Ce^{kx}\, dx = \frac{C}{k}e^{kx} + C_2, \qquad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Eftersom C är en allmän konstant är C/k en allmän konstant, som vi kan kalla C_1.
Svar. Den allmänna lösningen är $y = C_1e^{kx} + C_2$, där $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Kontroll. Från $y = C_1e^{kx} + C_2$ får vi $y' = kC_1e^{kx} + 0 = C_1ke^{kx}$, och vidare $y'' = k^2C_1e^{kx}$, så $y'' = ky'$ och ODEn är uppfylld.

Notera att vi fick två allmänna konstanter i lösningen till andra ordningens ODE. Detta hänger ihop med att ODEn är ett samband där andraderivatan ingår, så för att få lösningen behöver man integrera två gånger. I allmänhet förväntar man sig att en ODE av ordning n har en allmän lösning där n allmänna konstanter ingår. I nästa avsnitt kommer vi att lära oss lösa mer allmänna ODE av ordning 2.

5.4 Linjära ODE av andra ordningen med konstanta koefficienter

En linjär ODE av ordning 2 är, per definition, en ODE på formen

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x),$$

där a_2, a_1, a_0 och g är givna funktioner. I detta avsnitt kommer vi att begränsa oss till fallet då koefficienterna framför y'', y' och y är konstanter, dvs

$$ay'' + by' + cy = g(x), \qquad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Om $a = 0$ har vi ekvationen $by' + cy = g(x)$, som är linjär av lägre ordning och som vi redan har löst. För att ODEn ska ha ordning 2 måste $a \neq 0$ och vi kan dividera ekvationen med a så att koefficienten framför y'' är 1. Med andra ord är vi intresserade av att lösa ODE på formen

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

där $p, q \in \mathbb{R}$ och f är någon funktion. Vår strategi är att först hitta en allmän lösning till homogena sådana ODE (dvs där högerledet är 0), och sedan utvidga detta till fallet med ett allmänt högerled $f(x)$.

Homogena linjära ODE av ordning 2 med konstanta koefficienter

Vi kommer i detta avsnitt att lösa ODE på formen

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad p, q \in \mathbb{R}.$$

Exempel 5.4.1

En sådan ODE är $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Vi börjar med en allmän egenskap hos homogena, linjära ODE.

Sats 5.4

Om y_1 och y_2 är två lösningar till den homogena linjära ODEn

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y = 0,$$

så är $Ay_1 + By_2$ också en lösning till denna ODE, för varje val av konstanterna $A, B \in \mathbb{R}$.

Bevis: Vi skriver beviset i specialfallet då ODEn har formen $y'' + py' + qy = 0$, för överskådlighetens skull. Det allmänna fallet bevisas på precis samma sätt. Att y_1 och y_2 är lösningar till denna ODE betyder alltså att

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0 \quad \text{och} \quad y_2'' + py_2' + qy_2 = 0.$$

Vi behöver visa att $y = Ay_1 + By_2$ också uppfyller ekvationen, så vi sätter in detta i vänsterledet och räknar

$$\begin{aligned} (Ay_1 + By_2)'' + p(Ay_1 + By_2)' + q(Ay_1 + By_2) &= \\ Ay_1'' + By_2'' + pAy_1' + pBy_2' + qAy_1 + qBy_2 &= \\ A(y_1'' + py_1' + qy_1) + B(y_2'' + py_2' + qy_2) &= \\ A0 + B0 &= 0, \end{aligned}$$

vilket precis innebär att $y = Ay_1 + By_2$ uppfyller ekvationen $y'' + py' + qy = 0$.

Vi vill nu lösa ODEn $y'' + py' + qy = 0$. För att få inspiration till hur lösningarna kan se ut tittar vi tillbaka på Exempel 5.3.7, där vi löste den enklare ODEn

$$y'' = ky' \iff y'' + (-k)y' + 0y = 0.$$

En av lösningarna vi fick där var $y = e^{kx}$. När vi tittar på det mer allmänna fallet $y'' + py' + qy = 0$ undrar vi därför om inte $y = e^{rx}$ kan vara en lösning för något lämpligt värde på $r \in \mathbb{R}$. Vi undersöker detta: derivering ger $y' = re^{rx}$ och $y'' = r^2e^{rx}$, så

$$\begin{aligned} y = e^{rx} \text{ är en lösning} &\iff \\ y'' + py' + qy = 0 &\iff \\ r^2e^{rx} + pre^{rx} + qe^{rx} = 0 &\iff \\ (r^2 + pr + q)\underbrace{e^{rx}}_{\neq 0} = 0 &\iff r^2 + pr + q = 0. \end{aligned}$$

Med andra ord är $y = e^{rx}$ en lösning till ODEn $y'' + py + q = 0$ om och endast om r är en rot till andragradsekvationen $r^2 + pr + q = 0$.

Definition 5.5

Andragradsekvationen $r^2 + pr + q = 0$ kallas för den **karakteristiska ekvationen** till ODEn $y'' + py' + qy = 0$.

Exempel 5.4.2

ODEn $y'' - 5y' + 6y = 0$ har den karakteristiska ekvationen $r^2 - 5r + 6 = 0$, som har rötterna $r_1 = 2$ och $r_2 = 3$. Enligt resonemanget ovan är $y_1 = e^{2x}$ och $y_2 = e^{3x}$ lösningar till ODEn. Vi kontrollerar att y_1 är en lösning och lämnar kontrollen av y_2 som övning: vi har $y_1' = 2e^{2x}$ och $y_1'' = 4e^{2x}$, så

$$y_1'' - 5y_1' + 6y_1 = 4e^{2x} - 5 \cdot 2e^{2x} + 6e^{2x} = (4 - 10 + 6)e^{2x} = 0,$$

så ODEn är uppfylld. Enligt Sats 5.4 är då

$$y = Ae^{2x} + Be^{3x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

lösningar till ODEn. Vi kommer strax att visa att detta är alla lösningar.

Lösningarna till ODEn $y'' + py' + qy = 0$ verkar alltså vara relaterade till rötterna till den karakteristiska ekvationen $r^2 + pr + q = 0$. En sådan andragradsekvation har antingen

- två olika reella rötter, som t ex $r^2 - 5r + 6 = 0$ som har rötterna $r_1 = 2$ och $r_2 = 3$;
- en reell dubbelrot, som t ex $r^2 + 2r + 1 = 0$ som har roten $r = -1$, eller
- två icke-reella komplexa rötter $a+bi$ och $a-bi$, som t ex $r^2+2r+5 = 0$ som har rötterna $-1 + 2i$ och $-1 - 2i$ (eftersom p och q är reella är det alltid så att de två rötterna är varandras komplexkonjugat).

Vi behandlar de tre fallen separat.

Fall 1: två olika reella rötter

Sats 5.6

Om den karakteristiska ekvationen $r^2 + pr + q = 0$ har två olika reella rötter r_1 och r_2, så har ODEn $y'' + py' + qy = 0$ den allmänna lösningen

$$y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}, \qquad A, B \in \mathbb{R},$$

på hela $\mathbb{R}$.

Bevis: Vi har redan sett att $e^{r_1 x}$ och $e^{r_2 x}$ är lösningar för alla $x \in \mathbb{R}$, och därför vet vi från Sats 5.4 att $y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ är en lösning för varje värde på A och B. Det som återstår att visa är att det inte finns några andra lösningar, dvs om y är en lösning till ODEn, så måste den vara på formen ovan.

Antag därför att y uppfyller $y'' + py' + qy = 0$. Vår strategi är att reducera problemet till ODEn som vi löste i Exempel 5.3.7. För att göra detta definierar vi en ny funktion $u = e^{-r_1 x} y$, där alltså r_1 är en av rötterna till den karakteristiska ekvationen. Genom att derivera u med hjälp av produktregeln, och använda sig av att y uppfyller $y'' + py' + qy = 0$, kan man visa att

$$u'' = (r_2 - r_1)u'.$$

(Beviset använder sig av sambandet mellan rötter och koefficienter till en andragradsekvation, och vi hoppar över detaljerna.) Detta är precis ODEn från Exempel 5.3.7 med $k = r_2 - r_1$ och u istället för y, och den allmänna lösningen är därför

$$u = C_1 e^{(r_2 - r_1)x} + C_2, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Men $u = e^{-r_1 x} y$, dvs $y = e^{r_1 x} u$, så uttryckt i y är den allmänna lösningen alltså

$$y = e^{r_1 x}(C_1 e^{(r_2 - r_1)x} + C_2), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Förenklar vi detta och byter namn på konstanterna får vi precis

$$y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Varje lösning är alltså på denna form, vilket skulle visas.

Vi kan nu lösa ODEn från det förra exemplet fullständigt: alla lösningar ges av $y = Ae^{2x} + Be^{3x}$, där $A, B \in \mathbb{R}$.

Exempel 5.4.3

Betrakta ODEn $y'' - 3y' - 4y = 0$.

a) Bestäm den allmänna lösningen.

b) Bestäm den lösning som uppfyller $y(0) = 3$ och $y'(0) = 2$.

Lösning. a) Den karakteristiska ekvationen är $r^2 - 3r - 4 = 0$, som har rötterna $r_1 = 4$ och $r_2 = -1$. Den allmänna lösningen till ODEn är därför

$$y(x) = Ae^{4x} + Be^{-x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

b) Vi använder begynnelsevillkoren $y(0) = 3$ och $y'(0) = 2$ för att bestämma konstanterna A och B. Vi har

$$y(0) = Ae^0 + Be^0 = A + B$$

och

$$y'(x) = 4Ae^{4x} - Be^{-x} \Longrightarrow y'(0) = 4A - B.$$

Villkoren är alltså ekvivalenta med ekvationssystemet

$$\begin{cases} A + B &= 3 \\ 4A - B &= 2 \end{cases}$$

som har lösningarna $A = 1$ och $B = 2$.

Svar.
a) $y(x) = Ae^{4x} + Be^{-x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$.
b) $y(x) = e^{4x} + 2e^{-x}$.

Anmärkning 5.4.4

Notera att vi behövde två begynnelsevillkor, eftersom den allmänna lösningen innehåller två konstanter som ska bestämmas. Att det är två konstanter beror i sin tur på att ODEn är av ordning 2, vilket innebär att det är två integrationer inblandade. (Vi såg detta tydligast i Exempel 5.3.7, men det gäller i allmänhet.) Vi återkommer senare till en fysikalisk tolkning av detta fenomen.

Fall 2: en dubbelrot

Betrakta ODEn $y'' - 4y' + 4y = 0$. Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \iff (r-2)^2 = 0.$$

Den har en enda rot $r = 2$, som alltså är en dubbelrot. Därmed vet vi att $y = e^{2x}$ är en lösning till ODEn. Därför är Ae^{2x} en lösning för varje $A \in \mathbb{R}$, enligt Sats 5.4. Men vi förväntar oss två konstanter och behöver därför ytterligare en "linjärt oberoende" lösning, alltså inte en konstant multipel av den vi redan har, trots att den karakteristiska ekvationen bara har en rot.

Ett knep att prova i sådana sammanhang är att multiplicera lösningen e^{2x} med x, så att vi får en ny funktion $y = xe^{2x}$. Vi kontrollerar ifall detta är en lösning genom att derivera och sätta in i ODEn. Produktregeln ger, efter förenkling, att

$$y' = e^{2x} + 2xe^{2x} \quad \text{och} \quad y'' = 4e^{2x} + 4xe^{2x}.$$

Så vi har

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 4y &= \\ 4e^{2x} + 4xe^{2x} - 4(e^{2x} + 2xe^{2x}) + 4xe^{2x} &= \\ 4e^{2x} + 8xe^{2x} - 4e^{2x} - 8xe^{2x} &= 0. \end{aligned}$$

Alltså är $y = xe^{2x}$ en lösning. Sedan tidigare vet vi att $y = e^{2x}$ är en lösning, och därför får man lösningarna

$$y = Ae^{2x} + Bxe^{2x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Man kan visa att detta gäller i allmänhet när karakteristiska ekvationen har en dubbelrot, och på samma sätt som i Fall 1 kan man visa att det inte finns fler lösningar. (Det är inte oväntat, eftersom vi redan har två konstanter.)

Sats 5.7

Om den karakteristiska ekvationen $r^2 + pr + q = 0$ har en dubbelrot r, så har ODEn $y'' + py' + qy = 0$ den allmänna lösningen

$$y(x) = Ae^{rx} + Bxe^{rx}, \qquad A, B \in \mathbb{R},$$

på hela $\mathbb{R}$.

Exempel 5.4.5

Lös ODEn $y'' + 2y' + y = 0$.

Lösning. Den karakteristiska ekvationen $r^2+2r+1 = 0$ har dubbelroten $r = -1$. ODEn har därför, enligt satsen ovan, den allmänna

lösningen
$$y(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Fall 3: två icke-reella rötter

Det återstår att lösa ODEn $y'' + py' + qy = 0$ i det fall den karakteristiska ekvationen har två icke-reella rötter r_1 och r_2. Eftersom koefficienterna är reella är rötterna konjugerade med varandra, dvs $r_1 = a+bi$ och $r_2 = a-bi$.

För att hitta den allmänna lösningen gör vi ett resonemang som utgår från att Fall 1 generaliserar till komplexa tal, och att potenslagarna även gäller komplexa tal. Den allmänna lösningen till ODEn är, enligt Sats 5.6 generaliserad till komplexa tal

$$\begin{aligned} y = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x} &= \\ Ce^{(a+bi)x} + De^{(a-bi)x} &= \\ Ce^{ax+ibx} + De^{ax-ibx} &= \quad \text{(potenslagar)} \\ Ce^{ax}e^{ibx} + De^{ax}e^{-ibx} &= \\ e^{ax}(Ce^{ibx} + De^{-ibx}) & \quad\; C, D \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Vi är dock bara intresserade av reella funktioner. Faktum är att den komplexa exponentialfunktionen uppfyller

$$e^{iv} = \cos v + i \sin v$$

om v är reellt, så

$$e^{ibx} = \cos(bx) + i\sin(bx)$$

och

$$e^{-ibx} = \cos(-bx) + i\sin(-bx) = \cos(bx) - i\sin(bx)$$

så ovanstående är lika med

$$\begin{aligned} e^{ax}(C(\cos(bx) + i\sin(bx)) + D(\cos(bx) - i\sin(bx))) &= \\ e^{ax}((C+D)\cos(bx) + (C-D)i\sin(bx)) & \qquad C, D \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Eftersom vi bara är intresserade av reella funktioner, tar vi bara med de värden på C och D sådana att $C + D$ och $(C - D)i$ är reella. Det visar sig att man får två allmänna reella konstanter A och B på detta sätt. Därmed får vi

$$y = e^{ax}(A\cos(bx) + B\sin(bx)), \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Notera dock att komplex analys är en helt egen vetenskap utanför ramen för denna kurs, där man i allmänhet inte bara kan utgå från resonemang i reell analys utan vidare. Argumentet ovan kan däremot motiveras precist, så att man kan visa följande.

Sats 5.8

Om den karakteristiska ekvationen $r^2 + pr + q = 0$ har två icke-reella rötter $a + bi$ och $a - bi$, där $a, b \in \mathbb{R}$, så har ODEn $y'' + py' + qy = 0$ den allmänna lösningen

$$y(x) = e^{ax}(A\cos(bx) + B\sin(bx)), \qquad A, B \in \mathbb{R},$$

på hela $\mathbb{R}$.

Exempel 5.4.6

Lös ODEn $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Lösning. Den karakteristiska ekvationen är $r^2 + 2r + 5 = 0$ som har rötterna $-1+2i$ och $-1-2i$. Enligt satsen ovan är den allmänna lösningen

$$y = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Exempel 5.4.7

Lös ODEn $y'' + 4y = 0$.

Lösning. Den karakteristiska ekvationen $r^2 + 4 = 0$ har rötterna $2i$ och $-2i$ (realdelen är 0). Enligt satsen ovan är den allmänna lösningen

$$y = e^{0x}(A\cos 2x + B\sin 2x) = A\cos 2x + B\sin 2x. \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Fysikalisk tolkning av Fall 3

Vi nämnde tidigare att ekvationen $y'' + \frac{\ell}{g}y = 0$ modellerar vinkeln y hos en pendel som svänger med en liten vinkel. Man kan alltså, utifrån Newtons andra lag (och en linjärapproximation) härleda att om en pendel svänger med vinkeln $y(t)$, där t är tiden, och $y(t)$ är liten, så ges vinkeln av $y'' + \frac{\ell}{g}y = 0$. I allmänhet beskriver $y'' + ky = 0$, där $k > 0$, en fri svängningsrörelse (såsom en pendel eller en fjäder). Denna ekvation kan vi lösa: den karakteristiska ekvationen är $r^2 + k = 0$, som har rötterna $\pm\sqrt{k}\,i$ (eftersom $k > 0$ saknas reella rötter). Den allmänna lösningen till ODEn är då, precis som i det föregående exemplet,

$$y(t) = A\cos\sqrt{k}\,t + B\sin\sqrt{k}\,t.$$

För att bestämma konstanterna A och B behöver man veta vad t ex $y(0)$ och $y'(0)$ är. I fallet med en pendel eller en fjäder är det alltså pendelns/fjäderns utslag och hastighet vid tiden $t = 0$. (Man brukar använda variabeln t istället för x när den betecknar tiden.)

Exempel 5.4.8

Vi såg tidigare att ODEn $y'' + 4y = 0$ har den allmänna lösningen

$$y(t) = A\cos 2t + B\sin 2t, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

För att lösa begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 2, \end{cases}$$

sätter vi in $t = 0$ i $y(t) = A\cos 2t + B\sin 2t$ och i $y'(t) = -2A\sin 2t + 2B\cos 2t$. Vi har $y(0) = A$ och $y'(0) = 2B$, så begynnelsevillkoret är ekvivalent med att $A = 0$ och $B = 1$, dvs

$$y(t) = \sin 2t$$

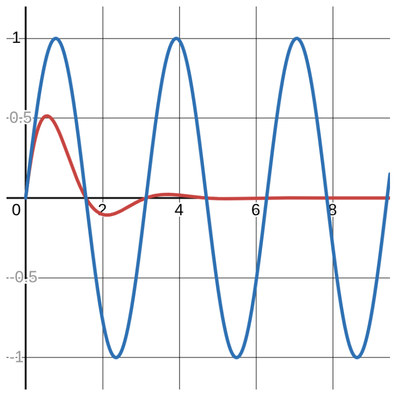
Vad är den fysikaliska tolkningen när koefficienten framför y' inte är 0? Vi såg tidigare att ODEn $y'' + 2y' + 5y = 0$ har den allmänna lösningen

$$y(t) = e^{-t}(A\cos 2t + B\sin 2t), \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Vi lämnar det som övning att visa att begynnelsevillkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 2$ ger $A = 0$ och $B = 1$ även denna gång, så man får lösningen

$$y(t) = e^{-t}\sin 2t.$$

Om vi jämför de två lösningarna ser vi att $y(t) = \sin 2t$ svänger med en konstant amplitud 1, medan $y(t) = e^{-t}\sin 2t$ har amplitud e^{-t}, som avtar på grund av den negativa exponenten. Med andra ord är den första svängningen odämpad, och den andra dämpad. (Vi begränsar oss till $t \geq 0$ eftersom vi tänker oss att svängningen börjar vid tiden $t = 0$; detta är ett exempel på hur tillämpningarna bestämmer det intervall där man löser en ODE.)



Inhomogena linjära ODE av ordning 2 med konstanta koefficienter

Vi betraktar nu ODE på formen

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

där $f(x)$ är någon funktion. Det homogena fallet, dvs då $f(x)$ är konstant lika med 0, har vi redan avklarat. Detta kommer att vara till nytta i det allmänna fallet.

Exempel 5.4.9

Betrakta ODEn $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2$. Visa att $y = x^2$ är en lösning.
Lösning. Om $y = x^2$ får vi $y' = 2x$ och $y'' = 2$, så

$$y'' - 5y' + 6y = 2 - 5 \cdot 2x + 6x^2 = 6x^2 - 10x + 2,$$

dvs vänsterled är lika med högerled och ekvationen är uppfylld.

Antag först att vi lyckats hitta *en* specifik lösning till ODEn, dvs en funktion $y_p = y_p(x)$ som uppfyller $y_p'' + py_p' + qy_p = f(x)$. I exemplet ovan kan vi t ex ta $y_p(x) = x^2$. (Ett annat ord för specifik är partikulär, och y_p kallas för en **partikulärlösning**, vilket förklarar beteckningen y_p.) Kan vi använda detta för att hitta alla andra lösningar?

Om y är vilken lösning som helst, dvs uppfyller $y'' + py' + qy = f(x)$, så betraktar vi differensen $y - y_p$. Om vi sätter in den i vänsterledet får vi

$$(y - y_p)'' + p(y - y_p)' + q(y - y_p) = \underbrace{y'' + py' + qy}_{=f(x)} - (\underbrace{y_p'' + py_p' + qy_p}_{=f(x)}) = 0,$$

dvs differensen $y - y_p$ är en lösning den homogena ODEn $y'' + py' + qy = 0$. Den måste därför vara någon av de lösningar vi hittat i det förra avsnittet.

Detta betyder att *varje* lösning y till ODEn $y'' + py' + qy = f(x)$ är sådan att $y - y_p$, som vi kallar för y_h, är en lösning till motsvarande homogena ODE $y'' + py' + qy = 0$. Eftersom vi kan hitta alla sådana y_h betyder det att vi kan hitta alla lösningar till den inhomogena ODEn: vi har nämligen

$$y - y_p = y_h \iff y = y_h + y_p.$$

Det vi har visat är alltså följande.

Sats 5.9

Den allmänna lösningen till ODEn $y'' + py' + qy = f(x)$ ges av

$$y = y_h + y_p,$$

där y_h är den allmänna lösningen till den homogena ODEn $y''+py'+qy = 0$, och y_p är någon lösning till ODEn $y'' + py' + qy = f(x)$.

Exempel 5.4.10

Lös ODEn $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2$, dvs bestäm den allmänna lösningen.
Lösning. Enligt satsen ovan är den allmänna lösningen $y = y_h + y_p$, där y_h är den allmänna lösningen till den *homogena* ODEn $y'' - 5y' + 6y = 0$, och y_p är en partikulärlösning till vår inhomogena ODE.

Den homogena ODEn har vi löst tidigare: den karakteristiska ekvationen $r^2 - 5r + 6 = 0$ har rötterna $r_1 = 2$ och $r_2 = 3$, så

$$y_h = Ae^{2x} + Be^{3x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

En lösning till den inhomogena ODEn såg vi i Exempel 5.4.9. Enligt det exemplet kan vi alltså välja

$$y_p = x^2.$$

Sammantaget är alltså den allmänna lösningen

$$y = Ae^{2x} + Be^{3x} + x^2, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Exemplet visar den allmänna principen. Nu fick vi partikulärlösningen $y = x^2$ given i Exempel 5.4.9. Frågan är hur man hittar en partikulärlösning från början. Svaret är att göra en *flexibel gissning (ansats)* där några okända parametrar ingår, och sedan *anpassa parametrarna* så att ODEn uppfylls. Låt oss titta på detta i några exempel.

Exempel 5.4.11

Lös ODEn $y'' - 5y' + 6y = 20 \sin x$.
Lösning. Den allmänna lösningen är $y = y_h + y_p$, där y_h är den allmänna lösningen till den homogena ODEn $y'' - 5y' + 6y = 0$, och

y_p är en partikulärlösning. Från det förra exemplet har vi sett att

$$y_h = Ae^{2x} + Be^{3x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Därefter ska vi bestämma y_p, alltså hitta *någon* funktion som uppfyller $y_p'' - 5y_p' + 6y_p = 20 \sin x$. För att göra en rimlig gissning frågar vi oss vad y_p kan vara för slags funktion för att en kombination av y_p, y_p' och y_p'' ska bli $20 \sin x$. Eftersom $\sin x$ förekommer när man deriverar $\cos x$ och $\sin x$, är en rimlig gissning $y_p = C \cos x + D \sin x$ för väl valda värden på C och D. För att kontrollera detta och bestämma C och D, deriverar vi och sätter in i ODEn. Vi har alltså

$$y_p' = -C \sin x + D \cos x \quad \text{och} \quad y_p'' = -C \cos x - D \sin x$$

så vänsterledet är

$$\begin{gathered} y_p'' - 5y_p' + 6y_p = \\ -C \cos x - D \sin x - 5(-C \sin x + D \cos x) + 6(C \cos x + D \sin x) = \\ (5C - 5D) \cos x + (5C + 5D) \sin x. \end{gathered}$$

Detta ska nu vara lika med med högerledet $20 \sin x$, vilket innebär att

$$\begin{cases} 5C - 5D &= 0 \\ 5C + 5D &= 20 \end{cases}$$

som vi kan lösa till $C = 2$ och $D = 2$. Vi får alltså en partikulärlösning $y_p = 2 \cos x + 2 \sin x$.

Svar. Den allmänna lösningen är

$$y = Ae^{2x} + Be^{3x} + 2 \cos x + 2 \sin x, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Vi lämnar kontrollen som övning.

Anmärkning 5.4.12

Notera alltså att konstanterna A och B i y_h är allmänna konstanter, och y_h är en lösning till den homogena ODEn för varje val av konstanter. Konstanterna C och D i y_p behöver däremot bestämmas så att y_p faktiskt är en lösning till den inhomogena ekvationen. Andra val av C och D ger i allmänhet inte lösningar till ODEn. Detta beror precis på att Sats 5.4 bara gäller homogena ODE, och det är därför som vi går vägen via homogena ODE när vi löser allmänna ODE.

Vi gissade alltså en partikulärlösning *av samma allmänna typ* som högerledet, med viss flexibilitet i och med att vi inkluderade konstanter/parametrar som vi sedan bestämde genom insättning. Detta påminner kanske om filosofin bakom partialbråksuppdelning i Avsnitt 4.7. Vi tar några fler exempel.

Exempel 5.4.13

Lös ODEn $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt} + 2y = 2e^{3t}$.

Lösning. Den allmänna lösningen är $y = y_h + y_p$, där y_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ODE, och y_p är en partikulärlösning.

För att bestämma y_h löser vi den karakteristiska ekvationen $r^2 - 2r + 2 = 0$, som har lösningarna $r = 1 \pm i$. Därmed har vi

$$y_h = e^t(A\cos t + B\sin t), \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

För att bestämma y_p gör vi ansatsen $y_p = Ce^{3t}$. För att bestämma C deriverar vi och sätter in. Vänsterledet blir

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 2y = 9Ce^{3t} - 2 \cdot 3Ce^{3t} + 2Ce^{3t} = 5Ce^{3t}.$$

Detta är lika med högerledet om och endast om $C = \frac{2}{5}$. Därmed är $y_p = \frac{2}{5}e^{3t}$.

Svar. Den allmänna lösningen är

$$y = e^t(A\cos t + B\sin t) + \tfrac{2}{5}e^{3t}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Exempel 5.4.14

Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y &= 8x + 4 \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 2 \end{cases}$$

Lösning. Vi hittar först den allmänna lösningen $y = y_h + y_p$ som vanligt, och först därefter sätter vi in begynnelsevillkoren.

Nu är y_h den allmänna lösningen till $y'' - 4y' + 4y = 0$. Den karakteristiska ekvationen $r^2 - 4r + 4 = 0$ har dubbelroten $r = 2$, så

$$y_h = Ae^{2x} + Bxe^{2x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

För att hitta en partikulärlösning y_p noterar vi att högerledet $8x+4$ är ett polynom av grad 1. Vi gissar därför att y_p är ett polynom; om polynomet har högre grad än 1 kommer $4y$-termen att bidra med högre potenser av x. Därför gör vi ansatsen $y_p = Cx + D$, dvs ett allmänt polynom av grad 1. Detta ger $y' = C$ och $y'' = 0$, så vänsterledet blir

$$-4C + 4(Cx + D) = 4Cx + 4D - 4C.$$

Detta är lika med högerledet för alla x om och endast om

$$\begin{cases} 4C &= 8 \\ 4D - 4C &= 4 \end{cases}$$

Detta är ekvivalent med $C = 2$ och $D = 3$, vilket ger $y_p = 2x + 3$. Den allmänna lösningen är

$$y = Ae^{2x} + Bxe^{2x} + 2x + 3, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Slutligen använder vi begynnelsevillkoren. Vi har

$$y(0) = Ae^0 + B \cdot 0e^0 + 2 \cdot 0 + 3 = A + 3$$

och

$$y'(x) = 2Ae^{2x} + B(e^{2x} + 2xe^{2x}) + 2,$$

så $y'(0) = 2A + B + 2$. Begynnelsevillkoren är alltså

$$\begin{cases} A + 3 &= 1 \\ 2A + B + 2 &= 2 \end{cases}$$

vilket är ekvivalent med $A = -2$ och $B = 4$. Vi har nu löst problemet.

Svar. Begynnelsevärdesproblemet har lösningen

$$y = -2e^{2x} + 4xe^{2x} + 2x + 3.$$

Anmärkning 5.4.15

Observera att begynnelsevillkoren gäller för hela lösningen $y = y_h + y_p$. Man måste alltså bestämma både y_h och y_p innan man använder villkoren. Att bara sätta in y_h i villkoren ger fel resultat, eftersom y_p också bidrar till $y(0)$.

Den allmänna idén är alltså att gissa en partikulärlösning som ser ut som högerledet men med visst spelrum för justering. Det finns en intressant komplikation som kan uppstå och som har en viktig fysikalisk tolkning. Nästa exempel får illustrera den.

Exempel 5.4.16

Lös följande ODE

a) $y'' + y = \cos 3t$ b) $y'' + y = \cos t$

Lösning. Eftersom vänsterleden är lika, kommer den "homogena delen" av lösningen att vara lika i del a) och b): den homogena ODEn $y'' + y = 0$ har den karakteristiska ekvationen $r^2 + 1 = 0$, med rötterna $r = \pm i$. Den allmänna lösningen till den homogena ODEn är därför

$$y_h = A\cos t + B\sin t, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

a) Den allmänna lösningen är $y = y_h + y_p$, där y_h är funktionen ovan. För att hitta y_p gör vi ansatsen $y_p = C\cos 3t + D\sin 3t$, på grund av att högerledet är $\cos 3t$. Deriverar vi två gånger får vi $y_p'' = -9C\cos 3t - 9D\sin 3t$. Insatt i ODEn ger detta

$$y_p'' + y_p = -8C\cos 3t - 8D\sin 3t.$$

Detta är lika med högerledet om och endast om $C = -\frac{1}{8}$ och $D = 0$. Den allmänna lösningen är därför

$$y = A\cos t + B\sin t - \tfrac{1}{8}\cos 3t, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

b) För att hitta den allmänna lösningen $y = y_h + y_p$ gör vi nu ansatsen $y_p = C\cos t + D\sin t$. Derivering ger $y_p'' = -C\cos t - D\sin t$. Men sätter vi in detta i ODEn får vi

$$y_p'' + y_p = -C\cos t - D\sin t + C\cos t + D\sin t = 0.$$

Oavsett val av C och D kommer alltså vänsterledet att vara 0, och därför inte lika med högerledet. Tittar vi på vår gissning av y_p är detta inte konstigt: den ser precis ut som y_h, som ju löser den homogena ekvationen $y'' + y = 0$, där högerledet är noll.

Vi behöver en ny ansats för y_p. Inspirerade av tidigare erfarenhet från t ex Sats 5.7 multiplicerar vi vår första ansats med t och gör den nya gissningen

$$y_p = Ct\cos t + Dt\sin t.$$

Deriverar vi två gånger med hjälp av produktregeln och förenklar får vi

$$y_p'' = C(-2\sin t - t\cos t) + D(2\cos t - t\sin t)$$

vilket ger

$$y_p'' + y_p = -2C\sin t + 2D\cos t.$$

(Notera hur termerna $t\cos t$ och $t\sin t$ tog ut varandra.) Nu kan vi välja C och D så att detta är lika med högerledet $\cos t$, nämligen genom $C = 0$ och $D = \frac{1}{2}$. Vi får $y_p = \frac{1}{2}t\sin t$ och den allmänna lösningen blir

$$y = A\cos t + B\sin t + \tfrac{1}{2}t\sin t, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Svar.

a) $y = A\cos t + B\sin t - \frac{1}{8}\cos 3t$, där $A, B \in \mathbb{R}$.

b) $y = A\cos t + B\sin t + \frac{1}{2}t\sin t$, där $A, B \in \mathbb{R}$.

Problemet i b) uppstod alltså därför att den partikulärlösning vi gissade redan ingick i y_h, dvs var en lösning till motsvarande homogena ODE. Metoden att lösa detta kan användas i allmänhet. Vi sammanfattar den som följer.

Idé

För att bestämma en partikulärlösning y_p till ODEn $y'' + py' + qy = f(x)$, gör vi en ansats av samma typ som $f(x)$, med allmänna parametrar som bestäms genom att sätta in lösningen i ODEn. Om ansatsen redan är en lösning till den homogena ODEn $y'' + py' + qy = 0$, multiplicerar vi med x för att få en ny ansats.

Denna multiplikation kan behöva upprepas ifall den karakteristiska ekvationen har en dubbelrot, som nästa exempel visar.

Exempel 5.4.17

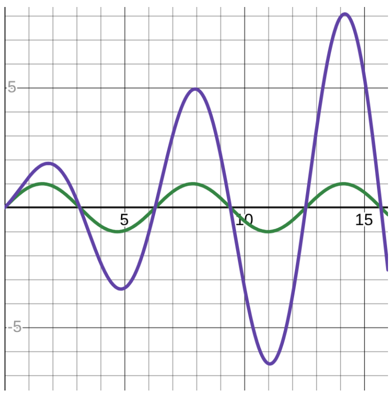
Lös ODEn $y'' + 2y' + y = 7e^{-x}$.
Lösning. Från exempel 5.4.5 vet vi att den homogena ekvationen $y'' + 2y' + y = 0$ har den allmänna lösningen

$$y_h = Ae^{-x} + Bxe^{-x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Den naturliga gissningen av partikulärlösning är $y_p = Ce^{-x}$, men detta är ett specialfall av y_h (med $B = 0$), så insättning och derivering skulle ge 0. (Testa gärna!) Vi multiplicerar med x och får en ny gissning $y_p = Cxe^{-x}$, men detta är också ett specialfall av y_h (nu med $A = 0$), så samma problem kommer att uppstå. Vi multiplicerar då än en gång med x och får en ny gissning $y_p = Cx^2e^{-x}$. Vi lämnar det som övning att bestämma C genom insättning och derivering och fullborda lösningen.

Fysikalisk tolkning

Denna multiplikation med x (eller t, om variabeln heter så) har en fysikalisk tolkning. Låt oss betrakta lösningarna från Exempel 5.4.16 grafiskt. För enkelhets skull väljer vi de lösningar som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 0$ och $y(1) = 1$. Dessa ser vi i figuren nedan till höger. Lösningen i a) (gröna kurvan) har konstant amplitud, medan lösningen i b) (lila kurvan) har en amplitud som växer med tiden. Den matematiska förklaringen är att faktorn t i $\frac{1}{2}t \sin t$ gör att denna term har den växande amplituden $\frac{1}{2}t$.



Fysikaliskt har vi nämnt att ODEn $y'' + y = 0$ beskriver en (odämpad) svängningsrörelse, t ex en pendel. Denna svängning beskrivs av $y_h = A\cos t + B\sin t$. Högerledet representerar en pålagd svängning (t ex en periodisk gungning av pendeln). Om den pålagda svängningen *inte* har samma frekvens som pendelns egen svängning, händer inte så mycket. Detta är vad som händer i fall a): den pålagda svängningen $\cos 3t$ har en annan frekvens än $A\cos t + B\sin t$. (Frekvensen hos $\sin kt$ och $\cos kt$ är $\frac{k}{2\pi}$.) Det resulterar i en partikulärlösning $y_p = -\frac{1}{8}\cos t$ som har konstant amplitud då. I fall b), däremot, har högerledet $\cos t$ samma frekvens som pendelns egen frekvens. Det resulterar i en partikulärlösning som svänger allt starkare: det uppstår **resonans**. Detta studerar man noga i vågrörelselära och tillhörande fysikkurser.

Detta utnyttjas när man konstruerar musikinstrument: ljudet i en gitarr förstärks av att strängarnas och resonanslådans frekvenser matchar varandra; lådan har en komplicerad geometrisk form för att kunna resonera med flera strängars svängningar. I byggkonstruktioner kan resonans ha förödande effekter: en dåligt konstruerad bro kan svänga farligt starkt om den utsätts för vindar som blåser så att resonans uppstår.

5.5 Serielösningar till differentialekvationer

De metoder vi hittills använt för att lösa ordinära differentialekvationer fungerar bara i mycket speciella fall: separabla och linjära ODE av ordning 1, och linjära ODE av ordning 2 med konstanta koefficienter. Många viktiga fenomen kan visserligen modelleras, åtminstone approximativt, med sådana ODE, men inte alla.

För att kunna säga något om mer allmänna ODE använder man sig av ett sätt att representera funktioner som vi redan stött på, nämligen genom serier. Vi studerade detta i Avsnitt 3.6. Kom ihåg att man säger att en funktion $f(x)$ **representeras av serien** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ på ett visst intervall, om

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$$

gäller på det intervallet, dvs serien konvergerar mot funktionsvärdet i varje x på intervallet. Talet $c \in \mathbb{R}$ är seriens konvergenscentrum. Med t ex $f(x) = e^x$ och $c = 0$ har vi sett att

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots .$$

Om man nu ska lösa en ODE, är en metod att anta att lösningen y representeras av en potensserie, och sedan derivera och sätta in serien i ODEn för att bestämma konstanterna $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Kom ihåg att potensserier kan deriveras enligt Sats 3.24.

För enkelhets skull använder vi 0 som konvergenscentrum, dvs vi gör ansatsen

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots .$$

Vi antar alltså att serien konvergerar mot y på något intervall (a, b). Enligt Sats 3.24 är denna serie deriverbar på intervallet, och

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 \cdots .$$

På samma sätt kan man derivera igen, om andraderivatan ingår i ODEn, och

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdot 3a_4 x^2 + 5 \cdot 4a_5 x^3 + \cdots .$$

Vi testar denna metod på en enkel ODE som vi löst flera gånger förr, för att förstå konceptet bättre.

Exempel 5.5.1

Lös ODEn $y' = y$. (Denna ODE är både linjär och separabel, men vi använder oss inte av denna kunskap här.)

Lösning. Vi gör ansatsen

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots ,$$

vilket ger

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots .$$

Ekvationen $y' = y$ innebär alltså att

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots .$$

Detta är uppfyllt om och endast om koefficienterna framför motsvarande potenser av x är lika, dvs

$$\begin{cases} a_1 &= a_0 \\ 2a_2 &= a_1 \\ 3a_3 &= a_2 \\ 4a_4 &= a_3 \\ & \cdots & \text{och i allmänhet} \\ na_n &= a_{n-1} \\ & \cdots \end{cases}$$

Vi kan nu använda dessa samband för att rekursivt bestämma koefficienterna: den första likheten bestämmer a_1 i term av a_0, nämligen $a_1 = a_0$. Nu när vi vet detta kan vi skriva om den andra likheten som

$$a_2 = \tfrac{1}{2}a_1 = \tfrac{1}{2}a_0,$$

och utifrån detta kan vi skriva den tredje likheten som

$$a_3 = \tfrac{1}{3}a_2 = \tfrac{1}{3\cdot 2}a_0,$$

och vidare den fjärde likheten som

$$a_4 = \tfrac{1}{4}a_3 = \tfrac{1}{4\cdot 3\cdot 2}a_0,$$

och så vidare. I allmänhet får vi, för varje $n > 0$, att

$$a_n = \tfrac{1}{n}a_{n-1} = \tfrac{1}{n\cdot(n-1)\cdots 4\cdot 3\cdot 2}a_0 = \tfrac{1}{n!}a_0.$$

(Se nästa anmärkning för ett rigoröst bevis.) Detta gäller för alla reella värden på a_0: vi har inga villkor på a_0, som får vara en allmän reell konstant. Vi har alltså

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots \\ &= a_0 + a_0x + \tfrac{1}{2}a_0x^2 + \tfrac{1}{3\cdot 2}a_0x^3 + \tfrac{1}{4\cdot 3\cdot 2}a_0x^4 \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n!}a_0x^n \\ &= a_0\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n!}x^n, \end{aligned}$$

där $a_0 \in \mathbb{R}$. Notera att $a_0 = y(0)$, eftersom $x = 0$ gör att $a_nx^n = 0$ för alla $n > 0$.

Om vi, vår vana trogna, kallar den allmänna konstanten a_0 för C, har vi alltså den allmänna lösningen

$$y = C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Vi har sett förut att denna serie konvergerar för alla $x \in \mathbb{R}$, så vår lösning är definierad på hela $\mathbb{R}$. När man löser en ODE med hjälp av potensserier är det oftast så att svaret inte går att uttrycka på något annat sätt än som en serie. Just potensserien $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$ känner vi dock igen som maclaurinserien för $f(x) = e^x$, så lösningen vi har fått är helt enkelt $y = Ce^x$, som väntat från Exempel 5.2.6 och 5.3.3.

Anmärkning 5.5.2

I exemplet ovan bevisade vi inte att $a_n = \frac{1}{n!}a_0$, utan utgick från att det verkade tydligt från mönstret vi observerade. Mönstret var rekursionsformeln $na_n = a_{n-1}$. För att vara säkra på vår sak visar vi detta med induktion.

Vi ska alltså visa $a_n = \frac{1}{n!}a_0$ för alla $n \geq 0$, utifrån rekursionsformeln $na_n = a_{n-1}$.

Basfallet då $n = 0$ är påståendet att $a_0 = \frac{1}{0!}a_0$, vilket är sant eftersom $0! = 1$. Vi gör induktionsantagandet (IA) att $a_p = \frac{1}{p!}a_0$ gäller för något $p \geq 0$, och ska visa att detta medför att $a_{p+1} = \frac{1}{(p+1)!}a_0$. Enligt rekursionsformeln är $(p+1)a_{p+1} = a_p$, så

$$a_{p+1} = \frac{1}{p+1}a_p \underset{\text{IA}}{=} \frac{1}{p+1}\frac{1}{p!}a_0 = \frac{1}{(p+1)p!}a_0 = \frac{1}{(p+1)!}a_0$$

och induktionssteget är klart.

Anmärkning 5.5.3

Låt gå tillbaka till exemplet ovan, denna gång mer koncist, genom att använda summanotationen fullt ut. ODEn $y' = y$ är ekvivalent med $y' - y = 0$. Vi ansätter serielösningen $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, vilket ger

$y' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$. ODEn är alltså ekvivalent med

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

För att underlätta beräkningarna vill vi numrera om termerna i den första summan, så att den allmänna termen har x^n och inte x^{n-1} som potens av x. Vi kallar $n-1$ för m, så

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^m.$$

(Summan börjar vid $m = 0$ eftersom detta svarar mot $n = 1$ på grund av att $m = n-1$.) Eftersom bokstaven m bara “lever inuti summan”, och tjänar den enda rollen att numrera termerna, kan vi lika gärna använda n. Vi har alltså

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Med denna omskrivning är vänsterledet i ODEn lika med

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1) a_{n+1} - a_n) x^n.$$

Att detta är lika med noll innebär att alla koefficienter är noll, dvs $(n+1)a_{n+1} - a_n = 0$ för alla $n \geq 0$. Detta är ekvivalent med rekursionsformeln vi hade ovan, och samma induktionsbevis ger

$$a_n = \tfrac{1}{n!} a_0,$$

och vi har därmed bestämt alla koefficienter i term av a_0. Sätter vi $a_0 = C$ får vi lösningen $C \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ som ovan.

Naturligtvis är detta inte det enklaste sättet att lösa just denna ODE, vilket visar värdet av våra tidigare lösningsmetoder för separabla och linjära ODE av ordning 1. Poängen är att vi på detta sätt kan angripa många fler ODE som förekommer i olika tillämpningar. Detta gäller till exempel Bessels ekvationer $x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$, där α är en reell konstant. Dessa ekvationer modellerar bland annat vågrörelser och värmeledning i områden med cirkulär symmetri. De är linjära ODE av ordning 2, men koefficienterna x^2, x och $x^2 - \alpha^2$ är inte konstanta, så våra tidigare metoder kan inte användas.

Vi löser en liknande ODE i nästa exempel.

Exempel 5.5.4

Lös ODEn $y'' - 2xy' + y = 0$.

Lösning. Vi ansätter $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, vilket ger

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{och} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2},$$

så vänsterledet i ODEn är

$$\begin{aligned} &y'' - 2xy' + y = \\ &\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \\ &\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \end{aligned}$$

där vi multiplicerat in $2x$ i den mellersta serien. För att förenkla beräkningarna och ha x^n som allmän term i alla serier, numrerar vi om termerna i den första serien på liknande sätt som i anmärkningen ovan. Vi ersätter $n-2$ med n (dvs sätter $m = n-2$ och döper sedan om m till n). Vi får

$$\begin{aligned} &\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \\ &\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)a_{m+2} x^m - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \\ &\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \end{aligned}$$

Nu analyserar vi termerna för varje $n \geq 0$. När $n = 0$ är det bara den första och den sista serien som bidrar, eftersom den mellersta serien börjar då $n = 1$. Koefficienten framför x^0 är alltså

$$(0+2)(0+1)a_{0+2} + a_0 = 2a_2 + a_0.$$

För $n > 0$ bidrar alla tre serier, och koefficienten framför x^n är

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n + a_n = (n+2)(n+1)a_{n+2} + (1-2n)a_n.$$

Vi sammanfattar: ODEn är uppfylld om och endast om vänsterledet är 0, vilket sker om och endast om koefficienten framför x^n är noll för alla n, vilket alltså är ekvivalent med

$$2a_2 + a_0 = 0 \quad \text{och} \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} + (1-2n)a_n = 0 \quad (n > 0).$$

Detta ger oss rekursionsformler för a_{n+2} i termer av a_n. Skriver vi om dessa ekvationer får vi nämligen

$$a_2 = -\tfrac{1}{2}a_0 \quad \text{och} \quad a_{n+2} = \tfrac{2n-1}{(n+2)(n+1)}a_n \quad (n > 0).$$

Vi räknar ut de första termerna. Notera att eftersom rekursionsformeln går två steg, dvs ger a_{n+2} i termer av a_n, är de första två koefficienterna a_0 och a_1 fria. Vi kan sätta $a_0 = A$ och $a_1 = B$. Då får vi

$$\begin{aligned}
&a_2 = -\tfrac{1}{2}a_0 = -\tfrac{1}{2}A \\
&a_{1+2} = \tfrac{2\cdot 1-1}{(1+2)(1+1)}a_1 \iff a_3 = \tfrac{1}{3\cdot 2}a_1 = \tfrac{1}{3!}B \\
&a_{2+2} = \tfrac{2\cdot 2-1}{(2+2)(2+1)}a_2 \iff a_4 = \tfrac{3}{4\cdot 3}a_2 = \tfrac{3}{4\cdot 3}(-\tfrac{1}{2}A) = -\tfrac{3}{4!}A.
\end{aligned}$$

Att hitta en allmän formel för a_n är tekniskt invecklat. Vi nöjer oss med att säga att man kan använda induktion för att visa att för $n \geq 4$ är

$$a_n = \begin{cases} -\dfrac{3\cdot 7\cdot 11\cdots(4(n-3)-1)}{n!}A & \text{om } n \text{ är jämnt} \\[2ex] \dfrac{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4(n-4)+1)}{n!}B & \text{om } n \text{ är udda} \end{cases}$$

Med dessa värden på a_n kan man visa att potensserien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergerar för alla $x \in \mathbb{R}$: detta bevisas genom en variant av kvottestet som går ut på att betrakta gränsvärdet

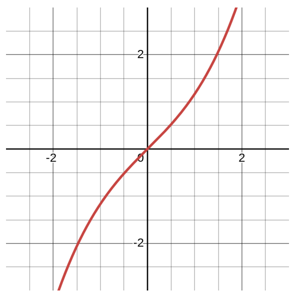
$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+2}x^{n+2}}{a_n x^n} \right|.$$

Därmed är $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ den allmänna lösningen till ODEn på hela $\mathbb{R}$.

I praktiken behöver man inte alltid hitta en allmän formel för a_n. Om man vet att serien konvergerar, innebär detta att man kan hitta en approximativ lösning genom att ta tillräckligt många termer. För en dator är det inte svårt att beräkna a_n för alla $n \leq 1000$, vilket ofta räcker väl. Om vi begränsar oss till $n \leq 4$ i lösningen ovan får vi approximationen

$$\begin{aligned} y &\approx \sum_{n=0}^{4} a_n x^n \\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \\ &= A + Bx - \tfrac{1}{2} A x^2 + \tfrac{1}{3!} B x^3 - \tfrac{3}{4!} A x^4. \end{aligned}$$

Notera att om $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ så är $y(0) = a_0$ och $y'(0) = a_1$. Konstanterna $A = a_0$ och $B = a_1$ kan vi alltså bestämma med hjälp av begynnelsevillkor. Om vi t ex har villkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$, får vi $A = 0$ och $B = 1$, vilket ger lösningen vars graf vi ser här, nämligen



$$y = x + \frac{1}{3!} x^3 = x + \frac{x^3}{6}.$$

Vi sammanfattar den allmänna principen.

Idé

För att lösa en ODE kan man ansätta en potensserielösning $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, eller mer allmänt $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$. Genom att derivera och sätta in potensserien i ODEn kan man bestämma koefficienterna a_n och få en allmän lösning. Genom begynnelsevillkor kan man bestämma de allmänna konstanterna i lösningen, eftersom $a_0 = y(c)$, $a_1 = y'(c)$, osv.

Anmärkning 5.5.5: Teoretisk anmärkning

Denna metod bygger på att vi antar att våra lösningar $y = y(x)$ kan representeras av potensserier, dvs att det finns en potensserie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ som konvergerar mot $y(x)$ på något intervall (a, b). Det är inte alla funktioner som uppfyller detta; en funktion kallas **analytisk** på intervallet (a, b) om detta är uppfyllt. Vi vet från Sats

3.24 att potensserien är deriverbar på det intervallet, så i så fall är $y'(x)$, $y''(x)$ osv också definierade. Om en funktion är analytisk är den alltså deriverbar hur många gånger som helst, dvs har (kontinuerlig) $n$te derivata för varje n. En sådan funktion kallas **glatt**. Men det räcker inte att vara glatt: finns glatta funktioner som inte är analytiska. I alla fall fungerar metoden med serielösningar för att hitta de lösningar som är analytiska på något intervall. Ofta är man intresserad av ett intervall kring någon punkt, t ex kring $x = 0$, och då gör man ansatsen med $c = 0$.

Det finns en djup och vacker teori för analytiska funktioner, som man kan studera i kurser i reell analys och (för funktioner av en komplex variabel) i komplex analys. Låt oss avsluta den här kursen med att hänvisa den nyfikna läsaren till dessa kurser, och med förhoppningen om att denna kurs gett dig en inblick i analysens vida, vackra och användbara värld.

* * *